

Done
C.H. #

Car by the Adwood



تقری مساوات

8/8/8
9m7
30/8



سلسلہ کتابیات اسلامیہ

تقرنی مساواتیں

ایڈورڈ کے تکمیلی احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ
از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے
پروفیسر ریاضیات، کالج جامعہ عثمانیہ
حیدرآباد دکن

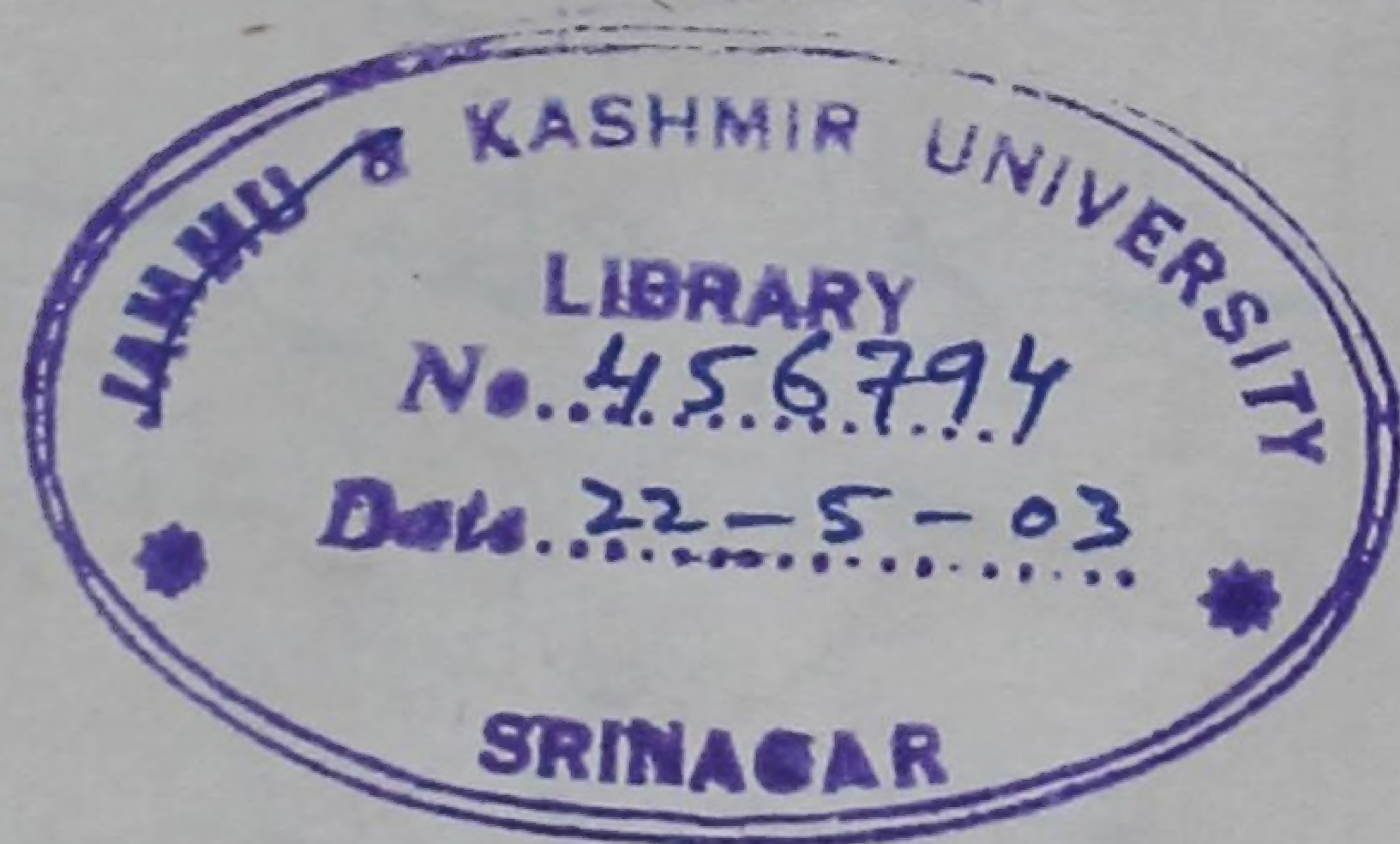
۱۰۰-۱۰۱

۱۳۴۱ھ ۱۳۴۲ھ ۱۹۲۳ء

دارالعلوم اسلامیہ کراچی

یہ کتاب سرس میلن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

510
959 ف



مضامین

تفرقی مساواتیں

نمبر	مضمون
۱	باب اول - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں
۲	تفرقی مساوات کی تکنیکیں -
۷	متغیر جدائی پذیر
۱۳	خطی مساواتیں
۲۱	باب دوم - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں (سلسل)
۲۶	متجانس مساواتیں
۳۲	ایک حرف غائب
۳۴	کلیروی صورت
۳۶	باب سوم، رتبہ دوم کی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں
۳۷	خطی مساواتیں
۳۸	ایک حرف غائب
۳۹	خطی مساوات کی عام سے عام صورت، کسی ایک رقم کا
۴۰	نکال دینا -
۴۱	ٹھیک تفرقی مساواتیں

۴۴	باب چہارم۔ مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں
۴۵	متعلقہ عمل کی عام صورت
۵۶	مستقل تفاعل
۶۳	خاص تکمیلی
۶۶	ایسی مساوات جو مستقل سروں والی خطی مساوات کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے
۸۱	باب پنجم۔ قائم مری متفرق مساواتیں
۸۳	قائم مری
۹۱	علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں
۹۲	مزید توضیحی مثالیں
۹۴	جوابات

تفرقی مساواتیں

باب اول

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

متغیر جدائی پذیر۔ خطی مساواتیں

- ۱۔ تکمیلی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عام طریقوں کا سرسری ذکر کر دینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کارآمد ہوں گی۔
 - اس جگہ ہم ان تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کریں گے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔
 - ۲۔ تفرقی مساوات کی تکنیکیں
- ذرا سی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے ”دھسل“ کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔

اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = (۱)

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے ا کی ایک خاص قیمت ہو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر یا تمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلوم قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلوم (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعل میں زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئے ورنہ پورے قبیل پر ایک یا عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہونگے۔ اس طرح ساقط ہو سکتا ہے۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

ف (لا، ما) = ا (۲)

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے ایک مساوات لا، ما اور ما میں حاصل ہوتی ہے۔ یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنانے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = (۱)

کا بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جف ف} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dots (۳)$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے $\frac{لا}{لا}$ کو ساقد کرنے سے ایک ربط
 $\frac{لا}{لا}$ حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔
 مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات

میں اختیاری مستقل $\frac{لا}{لا}$ کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$م کے لئے حل کرنے سے \frac{لا}{لا} = م$$

$$تفرق کرنے سے \frac{لا}{لا} = م$$

یا بطرز دیگر $\frac{لا}{لا} = م$ کے لئے حل کرنے کے بغیر

$$\frac{لا}{لا} = م$$

اس لئے

یہ مساوات ان تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں
 سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے
 گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اس کے کسی نقطہ پر وہی ہے
 جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملائے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

$$ف (لا، ما، لا، ب) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے جس میں دو اختیاری مستقل $\frac{لا}{لا}$ و $\frac{ب}{ب}$ ہیں اور قبیل کے مختلف
 منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ بلحاظ
 لاکے اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے $\frac{لا}{لا}$ ، $\frac{ما}{ما}$ ، $\frac{لا}{لا}$ و $\frac{ب}{ب}$
 میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

$$ف (لا، ما، لا، ب) = ۰ \dots \dots (۲)$$

اگر ایک دفعہ اور لحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو
لا، ما، ما، ما، ر، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کر دو کہ یہ حسب
ذیل ہے

صہ (لا، ما، ما، ما، ر، ب) = (۳)
ان تین مساواتوں سے ر، ب ساقط ہو سکتے ہیں، کم از کم نظری لحاظ
سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے) اس طرح
لا، ما، ما، ما، کو باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، ما، ما، ر، ب) =
حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔
۴۔ مساوات کا رتبہ

تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ
اس اعلیٰ ترین تفرقی سرے سے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیاری
مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات
حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں
ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔
یہ استدلال بالکل عام ہے، ان اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے
ہمیں ن دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، ما، ما، ما، کو
باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صریحاً
ن ہوگا۔

مثال ۱۔ مساوات لا + ما = ۲ لا + ج سے ر اور ج کو
ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما = ر

دوبارہ تفرق کرنے سے ۱ + ما = ۰

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرا

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی مساوات سراسر میں
 (ماہ ہے) جو اُن تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر
 واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ اُن تمام مرکزدار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم
 کرو جن کے محور محدودوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔
 مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

$$لا + ب = ما = ا$$

تفرق کرنے سے $لا + ب = ما = ا$

دوبارہ تفرق کرنے سے $ا + ب = (ما + ما) =$

جس سے $لا (ما + ما) = ما =$

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ عمل استقاط الٹ نہیں سکتا۔

بالعموم اوپر کا عمل استقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی
 تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی
 مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل استقامت کی طرح چند معیاری صورتوں
 سے کام لے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں
 جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے۔

تاہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ
 کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیاری
 مستقلات میں ایک ایسا جبر یہ ربط معلوم کرنا چاہیے کہ ان مستقلات
 کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے۔ ایسا جبر یہ
 ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے۔

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶۔ انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں
صورت اول۔ متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رتھیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رتھیں دوسری طرف لائی جائیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱۔ مثلاً اگر $\text{قط ما} = \text{قط لا}$ فر ما

تو $\text{جہم لا فر لا} = \text{جہم ما فر ما}$
تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + ۱
حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

مثال ۲۔ اگر $\frac{\text{لا} + ۱}{\text{ما} + ۱} = \text{لا ما فر لا}$

تو $(\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ما}}) \text{فر لا} = (\frac{۱}{\text{ما}} + \frac{۱}{\text{لا}}) \text{فر ما}$

اس لئے $\frac{\text{لا}^۲}{\text{پ}} + \text{لوک لا} = \frac{\text{ما}^۲}{\text{پ}} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{پ}} + ۱$
جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو
۱۔ لا جہم ما فر لا = ما جہم لا فر ما

$$= \frac{1 + 6 + 6^2}{1 + 6 + 6^2} + \frac{\text{فر 6}}{\text{فر 6}} = \frac{1 + 6 + 6^2}{1 + 6 + 6^2} = \frac{\text{فر 6}}{\text{فر 6}}$$

۴۔ ثابت کرو کہ مثال ۱۳ کے قبیل منحیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

$$5 - لا ا = \frac{فر ا}{لا ا} = \frac{لا ا + 1}{لا ا + 1} (1 + لا ا + لا ا^2)$$

$$4 = \frac{\text{فرما}}{\text{ولا}} = \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا}} + \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا}} = 4$$

۲۔ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کا محاس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عہ) بنائے صرف اس جماعت

۹۔ اُن منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹینری زیر ماس متقل ہو

(۲) کارٹینری زیر عمارت متقل ہو

(۳) قطبی زیر ماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۔ اس منحنی کی کارٹیزی مساوات معلوم کرو جس کے مماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم۔ خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

مان + ف مان - ۱ + ق مان - ۲ + + ک مان - ر

جہاں 'ت'، 'ق'، 'ک'، 'ر' متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقداریں ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے ہیں اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

$$با + ت = ق$$

اگر اس کے دونوں جانب کوک فرلا سے ضرب دیدیا جائے تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{ق}{ک} = (با کوک فرلا) = ق کوک فرلا$$

$$پس با کوک فرلا = ق کوک فرلا + ۱$$

یہ 'لا' کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی کوک فرلا کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات

کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے

شکل جزو ضربی کہتے ہیں۔

$$مثال ۱۔ با + لا = لا کوک فرلا$$

شکل جزو ضربی یہاں کوک فرلا یا کوک فرلا ہے اور اس لئے مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{ق}{ک} = (با کوک فرلا) = لا کوک فرلا$$

$$یا با کوک فرلا = لا کوک فرلا + ۱$$

$$\frac{2y}{2}$$

یعنی $1 + 1 = 2$

مثال ۲۔ $\frac{فرما}{فرلا} + \frac{1}{لا} = 2$ کو تکمیل کرو۔

اس جگہ تکمیل جزو ضربی ہو کر $\frac{1}{فرلا} = 2$ ہو کر $لا = 2$ ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے $\frac{فرما}{فرلا} = (2) = لا$

اور $لا = 2$ یا $1 + \frac{1}{2} = 2$

۸۔ ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{فرما}{فرلا} + ف = ق$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں۔
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{فرما}{فرلا} + ف = ق$$

$$یا \quad \frac{فرما}{فرلا} + ف = ق$$

$$رکھو \quad ما = ق$$

$$تو \quad ما = ق$$

$$یا \quad \frac{فرما}{فرلا} + (ق - ف) = ق$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے
 $y = (1-n)k + (1-n)k + 1$

یعنی $y = (1-n)k + (1-n)k + 1$

مثال ۱۔ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ کو تکمیل کرو

یہاں $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$

یا $\frac{1}{x} = 1$ سے

$\frac{1}{x} = 1$

اور چونکہ مشکل جزو ضربی ہو گا $\frac{1}{x} = 1$ کو $x = 1$ سے

اس لئے $\frac{1}{x} = 1$

یعنی $\frac{1}{x} = 1$ کو $x = 1$

یعنی $\frac{1}{x} = 1$ کو $x = 1$

مثال ۲۔ مساوات $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ کو تکمیل کرو

قطعاً $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ کو $x = 1$ سے

$$\text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲\text{ لا ی} = \text{لا}^۳$$

شکل جزو ضربی کو ۲ لا فرلا ہے اس لئے

$$\text{ی فرلا}^۲ = \text{کر لا}^۳ \text{ فرلا} + ۱$$

فرض کرو کہ $\text{لا}^۲ = \text{سہ}$

تب $۲\text{ لا فرلا} = \text{فرسہ}$

$$\text{پس } \text{کر لا}^۳ \text{ فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{ کر سہ فرسہ}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ فرسہ (سہ - ۱)}$$

$$\text{پس } \text{س م} \times \text{فرلا}^۲ = \frac{۱}{۲} \text{ فرلا}^۲ (۱ - \text{لا}^۲) + ۱$$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بیڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو مکمل کرو

$$۱- (۱ + \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{م} = \text{فرسہ لا}^۲ \quad ۲- \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{م} = \text{جب ب لا}$$

$$۳- \frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} + \frac{\text{ل}}{\text{ط}} = \text{ط ب ن} \quad ۴- \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{لا}}{\text{م}} = \text{م}^۲$$

$$۵- (۱ + \text{م}^۲) + (\text{لا} - \text{فرلا}) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad ۶- (\frac{\text{م}}{\text{لا}^۲} - \frac{\text{م}}{\text{لا}}) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$$

۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر متکمل جزو ضربی و مرکب فرلا کے حاصل کرنے میں قوت نما کے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹیشیائی زیر عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔
ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو

$$9 - \frac{فرلا}{لا} = \frac{ا}{لا} + \frac{فرما}{لا} \quad 10 - \frac{فرما}{لا} = \frac{ا}{لا} + \frac{فرلا}{لا}$$

$$11 - \frac{فرما}{لا} + لا = لا$$

$$12 - \frac{فرما}{لا} + \frac{ا}{لا} = \frac{ا}{لا} \text{ مس ما جب ما [رکھو ما = جب ای]}$$

$$13 - \frac{فری}{لا} + \frac{ا}{لا} = \frac{ا}{لا} \text{ (لوک ای) [رکھو ای = فو]}$$

$$14 - \frac{فری}{لا} + لا = فو \text{ (ن-ا) ای [رکھو ای = لوک ما]}$$

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیر حماس کے متکافوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی ن وین قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات $لا - ع = ع + \frac{ا}{لا} + \frac{ا}{لا} + فو$ ہو

ہے جہاں ک ایک معلومہ اور λ اختیاری مستقل ہے۔
۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{لا} + \frac{فرما}{فرلا} \quad (۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \frac{فرما}{فرلا} = قو جب ب لا$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{مس ما}{لا + ۱} = (لا + ۱) قو لا ق ط ما$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{ن دما}{ق دما} = ق د لا ق د لا = \frac{ق د لا ق د لا}{ق د لا}$$



باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (مسل)

متجانس مساواتیں - ایک حرف غائب

کلیدی صورت

۹- صورت سوم - متجانس مساواتیں -
جو مساواتیں لا، ما میں متجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\text{لا} \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \right) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

(۱) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے
حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فہ} \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}} \right)$$

اس میں رکھو ما = ولا

تو حاصل ہوگا $\text{ولا} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{فہ} (و)$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرو}}{\text{فہ} (و)} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی

تحت میں آجاتا ہے۔

$$\text{پس } \text{لوک } ۱ = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱ - ۱} = ۱$$

(ب) لیکن اگر $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱}$ کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱}$ کے لئے ع رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا} - \text{فر } ۱ \quad (۱) \dots\dots\dots$$

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فر } ۱ - \text{فر } ۱ + \text{فر } ۱ = \text{فر } ۱$$

$$\text{فر } ۱ = \frac{\text{فر } ۱ - \text{فر } ۱}{\text{فر } ۱ - \text{فر } ۱}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں

یعنی $\text{لا} = \text{فر } ۱ - \text{فر } ۱$ فرض کرو $\dots\dots\dots (۲)$
ع کو ان مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مثال ۱} - (\text{لا} + \text{ما}) = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} = \text{لا}$$

$$\text{یہاں } \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

اور $\text{ما} = \text{لا} - \text{فر } ۱$ رکھنے سے

$$\text{لا} = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} + \text{فر } ۱ = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} + ۱$$

$$\text{یا لا فرد} = \frac{۳}{۲+۱}$$

$$\frac{۳}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \quad \text{فرد}$$

$$\text{یا لوک لا} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \quad \text{لوک و}$$

$$\text{یا ا ما} = \frac{۲}{۲+۲}$$

مثال ۲ - فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۲+۲} + \left(\frac{۲}{۲+۲} \right)$$

$$\text{یعنی } ۱ = لا (ع + ع)$$

$$\text{تب } ع = (ع + ع) + لا (ع + ع) \quad \text{فرع}$$

$$\text{یا } \frac{۲}{۲+۲} + \left(\frac{۲}{۲+۲} \right) = ع$$

$$\text{جس سے حاصل ہوتا ہے لوک لا} + ۲ \text{ لوک ع} - ع = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{یعنی } لا ع = ع$$

$$\begin{cases} ع - ع = \frac{۱}{۲} \\ لا ع = ع \end{cases}$$

اور

کام حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

$$\text{یہ حال استقاط ہے لوک } \left\{ \frac{۱}{۲} - \left(\frac{۲}{۲+۲} \right) \right\} = \frac{۱}{۲} \quad \text{یا } \left\{ \frac{۱}{۲} - \left(\frac{۲}{۲+۲} \right) \right\} = \frac{۱}{۲}$$

لیکن اگر چہ یہ طریق پر ع کو سا ققط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر سا ققط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع والی ان مساواتوں

کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا ع حاصل استقاط تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$1 - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا}{لا+ما} \quad 2 - (ما+لا) = (ما+لا) \frac{فرما}{فرلا}$$

$$3 - لا^2 \frac{فرما}{فرلا} = ما^2 \quad 4 - ما = لا \left[\frac{فرما}{فرلا} + \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right]$$

$$5 - ما = لا \left\{ 1 + \left(\frac{فرما}{فرلا} \right) + \frac{فرما}{فرلا} + ج \right\}$$

۱۰۔ خاص صورت

$$\text{مساوات} \quad \frac{لا+ب+ما+ج}{لا+ب+ما+ج} = \frac{فرما}{فرلا} \quad \text{آسانی متجانس شکل میں}$$

اس طرح لائی جاسکتی ہے

$$\text{اس میں رکھو} \quad \begin{cases} لا = ضا + ه \\ ما = عا + ک \end{cases} \quad \text{جہاں ضا، عا متغیر ہیں اور} \\ \text{ه، ک مستقل۔}$$

$$\text{تب} \quad \frac{رضا+ب+عا+(ا+ه+ب+ک+ج)}{رضا+ب+عا+(ا+ه+ب+ک+ج)} = \frac{فرعا}{فرضا}$$

$$\text{اب ه، ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ} \quad \begin{aligned} ا+ه+ب+ک+ج &= 0 \\ ا+ه+ب+ک+ج &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{پس} \quad \frac{ب+ج-ب+ج}{ب+ج-ب+ج} = \frac{ک}{ج-ج-ا} = \frac{ا}{ا+ب-ا}$$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرضاً}} = \frac{\text{و ضاً} + \text{ب عاً}}{\text{و ضاً} + \text{ب عاً}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں $\text{عاً} = \text{و ضاً}$ اور متغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔
۱۱۔ لیکن ایک صورت میں عاً ک اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ} \quad \frac{1}{\text{و}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ $\frac{1}{\text{و}} = \text{م اور لا} + \text{ب ما} = \text{عاً}$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرماً}}{\text{فرلاً}} = \frac{1}{\text{ب}} \left(\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} - 1 \right)$$

$$\text{پس} \quad \left(\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} - 1 \right) = \frac{\text{ب عاً} + \text{ج}}{\text{م عاً} + \text{ج}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} = \frac{(\text{و م} + \text{ب عاً} + \text{و ج} + \text{ب ج})}{\text{م عاً} + \text{ج}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرلاً}}{\text{فرعاً}} = \frac{\text{م عاً} + \text{ج}}{(\text{و م} + \text{ب عاً} + \text{و ج} + \text{ب ج})}$$

متغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا مکمل عمل میں آ سکتا ہے۔
۱۲۔ ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرماً}}{\text{فرلاً}} = \frac{\text{و لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\text{ب لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}$$

جہاں شمار کنندہ میں ما کا سر نسب نامہ لا کے سر کے مساوی اور مختلف العلامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے
(و لا + ج) فرلاً + ب (ما فرلاً + لا فرماً) = (ب ما + ج) فرماً

جو ایک "ٹھیک یا حاصر" تفرقی مساوات ہے، اس کا تکمیل ہے
 $۱ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا = ۲ ب + لا + ۲ ج + ۲ م + ۲$
 جہاں م اختیاری مستقل ہے۔

مثال ۱۔ تکمیل کرو $\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} = \frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$ کو۔

رکھو $لا = ضا + م$ ، $۲ = عا + ک$
 پس $\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} = \frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$
 م اور ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$$\begin{cases} ۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا = ۰ \\ ۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا = ۰ \end{cases}$$

یعنی $۱ = ک$ ، $۲ = م$

تب $\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} = \frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$
 اب رکھو $۲ = عا$ ، تب

$$\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} = \frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$$

$$\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} = \frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$$

$$\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} = \frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$$

$$= \left[\frac{۱ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} + \frac{۱ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا} \right] \frac{۱ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$$

۱۔ لوک ضا = $\frac{۱ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$ لوک $\frac{۱ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$ اور $\frac{۲ - لا + ۲ ج + لا + ۲ ب + لا}{۲ - لا + ۲ ج + لا}$

مثال ۲۔ تکمیل کرو $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + با}{۱ - با + لا}$ کو
فرض کرو کہ $لا + با = ی$ ، تب

$$\frac{فری}{فرلا} = ۱ + \frac{ی}{۱ - ی} = \frac{۱ - ی + ی}{۱ - ی}$$

اور $فرلا = \frac{۱ - ی}{۱ - ی}$ فری $= \frac{۱}{۲} [۱ - \frac{۱}{۱ - ی}]$ فری

$$لا = \frac{۱}{۲} - ی \frac{۱}{۲} \quad \text{لوک } (۱ - ی) + ۱$$

$$جہاں \quad ی = لا + با$$

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو۔

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۳}{۳ - با ۲ + لا ۳}$$

$$۳ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۲ - ۲}{۳ - با + لا ۳}$$

$$۵ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + با + ۱}{۱ - با + لا}$$

$$۷ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۳ + با ۲ - ۵}{۳ - با ۲ + لا ۳}$$

$$۸ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۳ - ۱}{۳ - با ۳ + لا ۲}$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ لا، با جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{فرما}{فرت} = لا + با + گ$$

$$\frac{لا}{ف} = - (ص لا + ب ما + ف)$$

ہمیشہ ایک مخروطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات $ف (\frac{ما}{لا} , \frac{لا}{ما}) = ۰$ کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ $ف (\frac{ما}{لا} , \frac{لا}{ما}) = ۰$ کے حل لا، ما اور

ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ لا، ب کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائل ذیل میں سے کون کون سے متشابہ جڑوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$(۱) ما^۲ = ۴ لا \quad (۲) ما = ۱ جمنر \frac{لا}{۲}$$

$$(۳) \frac{لا}{۲} + \frac{ما^۲}{ب} = ۱ \quad (۴) ما^۲ = ۲ لا \quad (۵) ب مس = \frac{لا}{۲} = ۱ + ما$$

$$(۶) لا^۲ + ما^۲ = ۳ لا$$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت

میں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف (ما، \frac{فرما}{فرلا}) = .$$

اسے ہم $\frac{فرما}{فرلا}$ یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف (ما)$$

$$تب \quad فرلا = ف (ما)$$

$$اور مکملی ہے لا = ۱ + \frac{فرما}{ف (ما)}$$

(۲) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما = ف (ع)

جہاں ع تفرقی سر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بمطابق لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع = ف (ع) \frac{فرع}{فرلا}$$

$$یعنی \quad فرلا = \frac{ف (ع) فرع}{ع}$$

$$پس \quad لا = ۱ + \frac{ف (ع) فرع}{ع}$$

مکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم ع کو اس مساوات اور ما = فہ (ع) سے سا قی کر رہے ہیں، اس طرح مساوات مفروضہ کا حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں ما موجود نہیں ہے،

اس صورت میں اس کی شکل ہوگی ف (لا، $\frac{ما}{لا}$) = ۰

چونکہ $\frac{ما}{لا} = \frac{۱}{\frac{لا}{ما}}$ اس لئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی

جاسکتی ہے سا (لا، $\frac{ما}{لا}$) = ۰

پس اگر ما کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح -

(۱) بشرط سہولت $\frac{لا}{ما}$ کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{ما} = فہ (لا)$$

$$تب \quad ما = \frac{لا}{فہ (لا)}$$

$$اور مکملی ہے ما = ۱ + \frac{لا}{فہ (لا)}$$

(۲) لیکن اگر $\frac{لا}{ما}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں $لا = فہ (ق)$
 جہاں $ق = \frac{مر لا}{مر ما}$ کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات
 میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$ق = فہ (ق) \frac{مر ما}{مر ما}$$

$$اس طرح مر ما = \frac{فہ (ق)}{ق} مر ق$$

$$اور ما = \frac{ق فہ (ق)}{ق} مر ق + ۱$$

تکمیل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں $ق$ کو اس مساوات اور $لا = فہ (ق)$
 سے ساقط کرنا چاہئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب
 حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ $لا$ موجود نہ ہو
 یا $ما$ ہم حتی الامکان سب سے پہلے $\frac{مر ما}{مر لا}$ کے لئے حل کرنے کی
 کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی
 ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ
 سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس
 ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے
 متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

$$مثال ۱۔ مساوات ۱ + لا - لا = \frac{مر ما}{مر لا}۔ کو تکمیل کرو$$

$$اسجگہ \frac{مر لا}{مر ما} = \frac{لا}{۱ + لا} یعنی مر ما = (لا + \frac{۱}{لا}) مر لا$$

اور $ما = \frac{لا^2}{۲} + لوک لا + ۱$ حل مطلوب ہے

مثال ۲ - حل کرو $لا = \frac{ما}{۲}$ $۱ + (\frac{ما}{۲}) = کو$ -
مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$لا = ق + \frac{۱}{ق}$ جہاں $ق = \frac{ما}{۲}$
یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے لحاظ سے تفرق کرتے سے

$$ق = (۱ - \frac{۱}{ق}) \frac{ما}{۲}$$

$$یا \frac{ما}{۲ق} = \frac{۱}{ق} - \frac{۱}{۳ق}$$

$$اور ما = لوک ق + \frac{۱}{۲ق} + ۱$$

اس مساوات اور مساوات $لا = ق + \frac{۱}{ق}$ کا
ق، حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$۱ - \frac{ما}{۲لا} = ما + \frac{۱}{۲} \quad ۲ - \frac{ما}{۲لا} = لا + \frac{۱}{لا}$$

$$۳ - \sqrt{لا + ۱} = \frac{ما}{۲لا} + لا = ۰$$

$$۴ - (۱۲ لا + لا^۲) = \frac{ما}{۲لا} = ۱ + ۱۲ لا$$

$$۵- (۱+۱۲) \frac{ما}{ولا} = ۱ + ۱۲ + ۱$$

$$۶- ۱ = جب \left(\frac{ما}{ولا} \right) - \frac{ما}{ولا} جم \left(\frac{ما}{ولا} \right)$$

$$۷- ۱ = ۱ + ۲ \left(\frac{ما}{ولا} \right) + ۱ \left(\frac{ما}{ولا} \right)$$

$$۸- لا \left(\frac{ما}{ولا} \right) = ۱ + ۱ + ۱ \frac{ما}{ولا}$$

$$۱۵- صورت پنجم - کلیدی صورت = لا \frac{ما}{ولا} + ف \left(\frac{ما}{ولا} \right)$$

$\frac{ما}{ولا}$ کے لئے ع لکھنے سے

$$۱) \dots \dots \dots (ع + لا + ف) (ع) \dots \dots \dots (۱)$$

بحفاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$ع = ع + لا \frac{ع}{ولا} + ف (ع) \frac{ع}{ولا}$$

$$یا \{ لا + ف (ع) \} \frac{ع}{ولا} = \dots \dots \dots (۲)$$

$$جس سے \frac{ع}{ولا} = . یا لا + ف (ع) = .$$

اب $\frac{ع}{ولا} = .$ سے حاصل ہوتا ہے $ع = ج$ جہاں ج مستقل ہے

پس $ما = ج + لا + ف (ج)$ تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔

نیز اگر ع کو مساوات

لا + فا (ع) = (۳) لا کا ایک تفاعل ہوگا
 سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا
 اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو
 ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱) اور (۳) سے ساقط کیا
 جائے تو ہمیں لا ، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی
 مساوات کو پورا کرے گا۔
 اب ع کو مساواتوں

$$ما = ع لا + فا (ع)$$

$$= لا + فا (ع)$$

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

$$ما = ج لا + فا (ج)$$

$$= لا + فا (ج)$$

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط

ما = ج لا + فا (ج) کا لفافہ معلوم کیا جائے۔

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔
 (۱) خطی حل جسے ”کامل ابتدائی“ کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیار
 مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لفافہ یا ”نادر حل“ جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل

نہیں ہوتا اور نیز یہ حل کامل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ

کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی

خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے

لفافہ کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر

ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ
 کرے۔

مثال - حل کرو $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$

کلیدی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$ما = م لا + \frac{1}{م}$$

لغات یا تادر حل اوپر کی مساوات اور

$$= لا - \frac{1}{م}$$

کے درمیان م کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

تادر حل ہے $ما = م لا$

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ تادر حل $ما = م لا$

مکانی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی $ما = م لا + \frac{1}{م}$

مکانی کے محاس کی مساوات ہے۔

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لغاتی حل معلوم کرو

$$۱ - ما = ع لا + ع^۲$$

$$۲ - ما = ع لا + ع^۳$$

$$۳ - ما = ع لا + ع^۴$$

$$۴ - ما = ع لا + ع^۵ + ع^۶$$

$$۵ - ما = (لا - ع) (ع - ع^۲)$$

$$۶ - مساوات ما = لا فہ (ع) + ساد (ع) (۱)$$

بھی پہلے بلحاظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال کرنے سے حل ہو سکتی ہے۔

تفرق کرنے سے

$$ع = فہ (ع) + لا فہ (ع) + ساد (ع) \quad \text{فر لا} \quad \text{فر ع}$$

$$\text{جس سے} \quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ع}} + \frac{\text{لا فہ (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}} = \frac{\text{ساد (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}}$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا} \quad \frac{\text{فہ (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}} = \frac{\text{ساد (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}} \quad \text{و کلا فہ (ع) - ع} \quad \text{فر ع} + 1$$

(۲).....

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

مثال حل کرو $۲ع + لا = ۲ع + ع + ۱$ (۱)

$$\text{تفرق کرنے سے} \quad ع = ۲ع + لا - ۲ع - ع \quad \text{فر لا} \quad \text{فر ع}$$

$$\text{یا} \quad ع = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ع}} - ۲ = -۲$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فر ع}}{\text{ع} - لا} = -۲$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ع - لا = -\frac{۲}{۳}ع - ۱$ (۲)
ان مساواتوں کا ع، حاصل استقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کر پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

$$\text{مساوات (۲) سے} \quad ۲ع + لا = ۲ع + ع + ۱$$

$$(۱) \text{ سے} \quad ع + ۲ع + لا = ع + ۱$$

$$\text{اس لئے} \quad ع + لا = ع + ۱$$

اس مساوات اور $ع + ۲ع + لا = ع + ۱$ سے چلیپی ضرب کے

ذریعہ

$$\frac{1}{6r + 9r} = \frac{\varepsilon}{9r - 6r} = \frac{\varepsilon}{9r + 6r}$$

جس سے حاصل استقاط ہے $3(2 + 3 + 4) = (2 + 3 + 4)(3 - 2) = 3(3)$

۱۷۔ ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں استقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع حاصل استقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

اشد

ذیل کی مساداتوں کو حل کرو

$$1-6 = \text{ع}^{\text{لا}} + \text{ع}$$

$${}^2C + {}^2C = 1 - 3$$

$$2x + 3y = 6 - 2$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + \ln(\varepsilon + \varepsilon) = 6 - \mu$$

$$ع^{\omega} + ع^{\omega} = 1 - 4 \quad \frac{1}{1 - ع^{\omega}} + ع^{\omega} = 1 - 5$$

$$٤ - ٤ = ٠ \text{ ع لا} + \text{ب ع}^٣$$

۸۔ ایک سطحی کے نقطہ N پر کا ماس محور OM سے t پر ملتا ہے اور t اس زاویہ میلان کے ماس کے متناسب ہے جو N کا OM کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ ۱۸۸۸ء]

۹۔ جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر ان کے ماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے محاسن کی مساوات اور تادیر حل
سے منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔

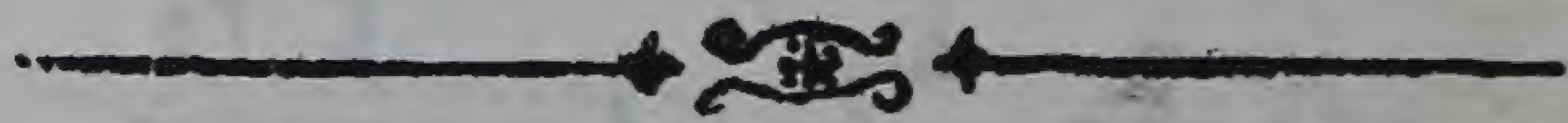
- ۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو حماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے مستقل ہو۔
- ۱۱۔ جن منحنیات میں حماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر حل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر تیار کرو۔
- ۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات $ما = ع' (لا - ع)$ کو پورا کرتا ہے، نیز اگر $لا = \frac{1}{p} تو ع = ما$ منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۸۹ء]
- ۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو

$$تو^3 (ما - \frac{ما}{لا}) = ج \{ تو^2 + (\frac{ما}{لا}) \} [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $لا^2 = س$ اور $ما^2 = ت$ تو مساوات ذیل

$$لا لا ما ما + (لا^2 - ما^2) (ب - ما) = لا ما =$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔
اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔



باب سوم

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

ٹھیک یا حاضری تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات

اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے

فہ (لا، ما، مام، مام) =

اس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی $\frac{م}{لا} + \frac{م}{لا} + \frac{ف}{م} + \frac{ق}{م} = ر$

جہاں ف، ق، ر متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کر کے مساوات

$\frac{م}{لا} + \frac{م}{لا} + \frac{ف}{م} + \frac{ق}{م} =$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔

فرض کرو کہ ما = فہ (لا) اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو

ما = می فہ (لا)

ما = می فہ (لا) + می فہ (لا)

$$م = م_1 ف_1 (لا) + م_2 ف_2 (لا) + م_3 ف_3 (لا)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$م_1 ف_1 (لا) + م_2 ف_2 (لا) + م_3 ف_3 (لا)$$

$$+ م_4 ف_4 (لا) + م_5 ف_5 (لا) + م_6 ف_6 (لا)$$

$$+ م_7 ف_7 (لا) = ل$$

لیکن $ف_1 (لا) + م_1 ف_1 (لا) + م_2 ف_2 (لا) + م_3 ف_3 (لا) =$ حسب مفروض

$$اس لئے $م = م_1 \left\{ ف_1 + \frac{م_2 ف_2 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_3 ف_3 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_4 ف_4 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_5 ف_5 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_6 ف_6 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_7 ف_7 (لا)}{ف_1 (لا)} \right\}$$$

جو $م$ کے لئے خطی مساوات ہے

تکمل جزو ضربی ہے

$$م = م_1 \left\{ ف_1 + \frac{م_2 ف_2 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_3 ف_3 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_4 ف_4 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_5 ف_5 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_6 ف_6 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_7 ف_7 (لا)}{ف_1 (لا)} \right\}$$

اور پہلا تکملی ہے

$$م = م_1 \left\{ ف_1 + \frac{م_2 ف_2 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_3 ف_3 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_4 ف_4 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_5 ف_5 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_6 ف_6 (لا)}{ف_1 (لا)} + \frac{م_7 ف_7 (لا)}{ف_1 (لا)} \right\}$$

جس سے دوسرا تکملی اور اس لئے تفرقی مساوات کا حل حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{مثال - اس مساوات کو حل کرو } \frac{م_1}{لا_1} + \frac{م_2}{لا_2} + \frac{م_3}{لا_3} = لا_4$$

$$\text{یہاں } م = لا \text{ مساوات } \frac{م_1}{لا_1} + \frac{م_2}{لا_2} + \frac{م_3}{لا_3} = لا_4 \text{ کا ایک حل ہے}$$

اس لئے رکھو $م = لا$

$$م = لا = لا_1 + لا_2 + لا_3$$

$$م = لا = لا_1 + لا_2 + لا_3$$

$$\text{اس لئے } لا_1 + لا_2 + لا_3 = لا_4 \text{ یا } لا_1 + لا_2 + لا_3 - لا_4 = 0$$

$$م + \left(\frac{۲}{لا} + لا^۳ \right) م = لا^۲ فو - \frac{لا^۴}{۳}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے $فوک (\frac{۲}{لا} + لا^۳)$ ملا یا $لا^۲ فو - \frac{لا^۴}{۳}$

$$پس ملا (م) لا^۲ فو = لا^۴$$

$$اور م لا^۲ فو = \frac{لا^۴}{۳} + ۱$$

$$یعنی م = \frac{۱}{۵} لا^۳ فو - \frac{لا^۴}{۳} + \frac{۱}{لا} فو - \frac{لا^۴}{۳}$$

$$جس سے م = - \frac{۱}{۵} فو - \frac{لا^۴}{۳} + ۱ م لا^۲ فو - \frac{لا^۴}{۳} ملا + ب$$

$$اور حل مطلوب ہے ما = - \frac{لا}{۵} فو - \frac{لا^۴}{۳} + ۱ م لا^۲ فو - \frac{لا^۴}{۳} ملا + ب لا$$

۲۰۔ صورت دوم۔ ایک حرف غائب
(۱) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ ما = ع

$$تب ما = \frac{مرع}{ملا} = ع = \frac{مرع}{مرما}$$

اس طرح مساوات ف (ما، ما، ما) = ہو جاتی ہے

$$ف (ما، ع، ع) = \frac{مرع}{مرما}$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(ب) اگر ما موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ ما = ع

$$\text{تب } \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^2$$

اور فہ (لا، ما، ما) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (لا، ع، فرع)} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} =$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات ما^۲ + ما^۲ = ۲ ما کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو ما = ع اور ما = ع فرع

$$\text{اس طرح } \text{ما}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{ع}^2 = ۲ \text{ ما}^2$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \frac{۲}{\text{ما}} = \text{ع}^2 = ۲ \text{ ما}^2$$

تشکیل جزو ضربی ہے جو کہ $\frac{۲}{\text{ما}} = \text{ما}^2$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = (\text{ع}^2 \text{ ما}^2) = ۲ \text{ ما}^2$$

$$\text{یا } \text{ع}^2 \text{ ما}^2 = \text{ما}^2 + \text{مستقل} = ۱ + \text{ما}^2 \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما}^2 \text{ فرلا}}{\text{ما}^2 + ۱} = \text{فرلا}$$

$$1 + 2 = \frac{2}{1} \quad \text{جواب}$$

یعنی $ما = ۲$ جنہ (۲ لا + ۱)
مثال ۲۔ حل کرو $۱ + ما = ۲$ لا + لا کو
یہاں مساوات میں $ما$ موجود نہیں ہے، پس رکھو $ما = ع$

اس طرح $1 + x^2 = \frac{\text{مرع}}{\text{مرا}}$

$$\frac{e^e}{e+1} = \frac{e}{e}$$

یعنی لوک لا = لوک $\sqrt{1 + \frac{1}{e^2}}$ + مستقل

$$1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} \quad (\text{فرض کرو})$$

یا $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ مرما

جس سے حاصل ہوتا ہے $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ جہاں 1 اور $\frac{1}{2}$ اختیار ہی مستقل ہیں۔

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

1 = 1/2 - 1

$$25 = 1 + 2$$

$$\frac{x}{2}(b+1) = b - 5$$

$$66 = 6 + 1 - 2$$

1940-1941

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ی۔ کاسر ن و + ف و ہے۔

اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

تو جس رقم میں ی واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے
اسی طرح اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں ی واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔
ی کاسر ہے

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

اگر و کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے
جو اوپر کے جملہ کو صفر بنادے تو ی = عا اور اس لئے ی = عا

اور ی = عا۔ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات
معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل ما = و کسی طرح سے معلوم ہو سکے
جیکہ اس کا بایاں رکن حذف کیا جائے تو ما = و ی رکھنے سے اور
پھر ی = عا فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں۔

$$f_1 - m_1 - k f_1 = m_1 - k f_1$$

$$f_2 - m_2 - k f_2 = m_2 - k f_2$$

$$f_3 - m_3 - k f_3 = m_3 - k f_3$$

وغیرہ وغیرہ

اس لئے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

$$f_1 - m_1 - k f_1 + f_2 - m_2 - k f_2 + \dots = 0$$

تو مساوات مفروضہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تفرقی ہے

$$(f_1 - m_1 - k f_1 + f_2 - m_2 - k f_2 + \dots) + m_1 = 0$$

$$+ (f_1 - m_1 - k f_1 + \dots) + m_1 = 0$$

مثال کیا مساوات لایا $12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 + 40 + 42 + 44 + 46 + 48 + 50 + 52 + 54 + 56 + 58 + 60 + 62 + 64 + 66 + 68 + 70 + 72 + 74 + 76 + 78 + 80 + 82 + 84 + 86 + 88 + 90 + 92 + 94 + 96 + 98 + 100 = 2550$ جب لا حاضر مساوات ہے؟

حاضر مساوات کو بانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

$$f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, \dots, f_n = n$$

$$اور f_1 - m_1 - k f_1 = f_2 - m_2 - k f_2 = f_3 - m_3 - k f_3 = \dots = f_n - m_n - k f_n = 0$$

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تکملی ہے

$$(12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 + 40 + 42 + 44 + 46 + 48 + 50 + 52 + 54 + 56 + 58 + 60 + 62 + 64 + 66 + 68 + 70 + 72 + 74 + 76 + 78 + 80 + 82 + 84 + 86 + 88 + 90 + 92 + 94 + 96 + 98 + 100) + m_1 = 2550$$

$$یا 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 + 40 + 42 + 44 + 46 + 48 + 50 + 52 + 54 + 56 + 58 + 60 + 62 + 64 + 66 + 68 + 70 + 72 + 74 + 76 + 78 + 80 + 82 + 84 + 86 + 88 + 90 + 92 + 94 + 96 + 98 + 100 = 2550$$

دایاں رکن کامل تفرقی سرے کا اگر

$$۱۲ لا^۲ - ۲۴ لا^۲ + ۱۲ لا^۲ =$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا تکملی ہے

$$(۸ لا^۳ - ۲۴ لا^۲ + ۲۴ لا - ۸) = جب لا + لا + لا + ب$$

$$۴ لا^۳ + ۴ لا^۲ + ۴ لا + ۴ = جب لا + لا + لا + ب$$

یا جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سرے، پس تیسرا تکملی ہے

$$لا^۴ = جم لا + \frac{۱ لا^۲}{۲} + ب لا + ج$$

امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ لا^۴ + ۱۵ لا^۳ + ۴۰ لا^۲ + ۶۰ لا + ۲۴ = فو حاضر مساوات

ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۶ لا + ۶ = جب لا (۳ - ۱) + جم لا (۳ - ۱) = جب لا$$

۳۔ ذیل کی مساواتوں کے پہلے تکملی معلوم کرو۔

$$(۱) لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۶ لا = فو$$

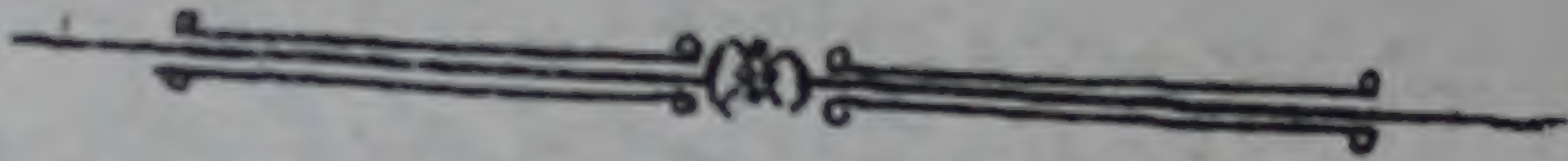
$$(ب) لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ = لا فو$$

$$(ج) لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۶ لا = لوک لا$$

۴۔ اگر مساوات ف + ف + ف + ف = و کا ایک مکمل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$f_1 m - \frac{f_1}{m} (f_1 m) + \frac{f_1^2}{m^2} (f_1 m) =$$



باب چہارم

مستقل سروں الی خطی، تفرقی مساواتیں

۲۶۔ عام خطی تفرقی مساوات

ن، ویں رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{0!} = 0 \dots (1)$$

یہاں $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ کے معلوم تفاعل ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل $a = 0$ (دلا) ایسے ہی بھانپ
لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔

تب اگر $a = 0$ (دلا) $+ y$ مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{0!} = 0 \dots (2)$$

فرض کرو کہ $y = y, y = y, y = y, \dots, y = y$ اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ $y = y + y + y + \dots + y + y$

یہی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں n مستقل y, y, y, \dots, y

شامل ہیں۔

اسلئے $a = y + y + y + \dots + y + y + 0$ (دلا)

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں n مستقل شامل ہیں اور اس لئے

یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) خاص تکمیلی (خ، ک) کہلاتا ہے اور

اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ن مستقل شامل ہیں متمم تفاعل (ص، ت) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متمم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں بائیں رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی

سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقادیر ف، ف، ف، ف، ف، ف سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات کا ذیل کی شکل اختیار کرے

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = c$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = c$$

جہاں a_1, a_2, \dots, a_n مستقل ہیں اور b_1, b_2, \dots, b_n کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہو گا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

مستقل سروں والی مساواتیں۔ متمم تفاعل

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = c$$

(۱)

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔
اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں

$$\text{فرض کرو کہ } m = m_1 + m_2$$

$$\text{تب } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) \quad (2)$$

اب چونکہ $\frac{1}{m}$ اور $\frac{1}{m_1}$ دو بے تعلق اختیاری مقادیر ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقادروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً $\frac{1}{m}$ کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب $\frac{1}{m}$ جہاں m لا انتہا کم ہے $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔

ثانیاً $\frac{1}{m_1}$ کو $\frac{1}{m}$ سے مختلف علامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ $\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}$ ایک اختیاری محدود مستقل $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو۔
اب رقوم

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

m کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ $\frac{1}{m}$ محدود ہے اور مربع خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مستند ہے اور اس میں m ربطوں جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ تو رقوم $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ کی بجائے ہم

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیاری

مستقلات کی تعداد ن ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۔ تین اصلیں مساوی اب ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں

جبکہ مساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی $m = m = m$

حسب بالا رقوم $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$ کی بجائے ہم

(ب + ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$ رکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $m = m + k$

تب $\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k$ (ب + ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k$

پس $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m$ کی بجائے ہم

(ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k$ (ب + ب + ب) $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}k$

$\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k$ [..... + $\frac{1}{2}k$]

رکھ سکتے ہیں اور $\frac{1}{2}k$ ، $\frac{1}{2}k$ ، $\frac{1}{2}k$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k$

$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k$

$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k$

جہاں ج، ج، ج کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ ک کچھ ہی ہو

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \text{ فہ } (1, 1) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 2) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (2, 1) + \dots + \frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \dots$$

اب رکھو $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ اور $\frac{1}{2} = 1$ جہاں 1 اور 1 دو محدود مستقل ہیں۔ جب ہم 1 کو لا انتہا کم کرینگے تو اوپر کے سلسلہ کی باقی رقیں بالآخر معدوم ہو جائیں گی۔

پس $\frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (2, 1)$ کی بجائے

$$\frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (2, 1) \text{ رکھا جاسکتا ہے اور اس طرح}$$

مستم تفاعل میں اختیاری مستقلات $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

کی وہی تعداد (ن) قائم رہتی ہے جو پہلے تھی۔ اور دفعہ ۳ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر e اصلیں مساوی ہوں یعنی $1 = 2 = 3 = \dots = 4$

تو رقوم $\frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (2, 1) + \dots + \frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1)$ کی بجائے ہم

$$\frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (2, 1) + \dots + \frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1) + \dots + \frac{1}{2} \text{ فہ } (1, 1)$$

رکھ سکتے ہیں جس سے حل کی عام شکل قائم رہتی ہے۔

دفعات ۲۹، ۳۰، ۳۱ کے نتائج اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں ان میں

فہ (۱، ۱) کی صورت ہوا لا تھی۔

۳۳ = خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصلوں کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $م = ا + خ$ ب $م = ا - خ$ ب جہاں $خ = ا - م$

تب رقوم $ا + م$ $ا - م$ یا $ا + م$ $ا - م$ (ب + خ) لا (ب - خ) لا

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

$ا + م$ $ا - م$ (ب + خ) لا (ب - خ) لا

$ا + م$ $ا - م$ (ب + خ) لا (ب - خ) لا

$ا + م$ $ا - م$ (ب + خ) لا (ب - خ) لا

$ا + م$ $ا - م$ (ب + خ) لا (ب - خ) لا

جہاں $ا + م$ اور $ا - م$ (ب + خ) کی بجائے

اختیاری مستقل $ا$ اور $ب$ رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ $ب = د$ جم $ع = ب$ $د$ جب $ع = ب$ تب

$د = ا + ب$ اور $ع = م$ $ب$

$ب$ جم $ب$ لا $ا + ب$ جب $ب$ لا $د$ جم $(ب - لا - ع)$

پس اس طرح ہم

بہ و لا جم ب لا + بہ و لا جب ب لا کی بجائے

ج و لا جم (ب لا + ج)

رکھ سکتے ہیں جہاں ج ج اختیاری مستقل ہیں۔

۴۔ مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت

ہو چکا ہے کہ اگر $م = م$ تو $م و لا + م و لا$ کی بجائے

(بہ + ب لا) $م و لا$ لکھا جاسکتا ہے اور $م و لا + م و لا$ کی بجائے

(بہ + ب لا) $م و لا$

پھر اگر $م = م$ = $و لا$ + $م$ اور $م = م$ = $و لا$ - $م$ تو ہم

$م و لا + م و لا + م و لا + م و لا$

کی بجائے (بہ + ب لا) $م و لا$ + (بہ + ب لا) $م و لا$ - $م$

یعنی $م و لا$ [(بہ + ب لا) جم ب لا + (بہ - ب لا) خ جب ب لا]

+ $م و لا$ [(بہ + ب لا) جم ب لا + (بہ - ب لا) خ جب ب لا]

اور اسلئے $م و لا$ (ج جم ب لا + ج جب ب لا) + $م و لا$ (ج جم ب لا + ج جب ب لا)

یعنی $\text{و}^{\text{لا}} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جم ب لا + $\text{و}^{\text{لا}} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جب ب لا
یا دوسری صورت میں $\text{د}^{\text{لا}} \text{جم} (\text{ب لا} + \text{د}^{\text{لا}}) + \text{د}^{\text{لا}} \text{جم} (\text{ب لا} + \text{د}^{\text{لا}})$
کہہ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات $\text{د}^{\text{لا}}$ ، $\text{د}^{\text{لا}}$ ، $\text{د}^{\text{لا}}$ کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (۴) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اُس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصلوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

$$۳۵ - \text{مساوات} \quad \frac{\text{م}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}} - ۳ \frac{\text{م}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}} + ۲ = ۰ \quad \text{کو حل کرو}$$

اس جگہ آزمائشی حل $\text{م} = ۱$ و $\text{لا} = ۱$ ہے، اس کو مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م} - ۳ \text{م} + ۲ = ۰$$

جبکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس $\text{م} = ۱$ و $\text{لا} = ۱$ اور $\text{م} = ۱$ و $\text{لا} = ۱$ دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{م} = ۱ \text{ و } \text{لا} = ۱ + ۱ \text{ و } \text{لا} = ۱$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{مثال ۲} - \text{حل کرو} \quad \frac{\text{م}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}} - ۱ \text{ م} = ۰ \quad \text{کو}$$

یہاں ابتدائی مساوات $\text{م} - ۱ \text{ م} = ۰$ ہے اور اس کی اصلیں $\text{م} = ۱$ و

اور عام حل ہے $ما = ا + و + لا$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں
 $ما = با + جمر + لا + فب + جبر + لا$

جہاں $ا$ کی بجائے $با + فب$ اور $و$ کی بجائے $با - فب$ لکھا گیا ہے

مثال ۳ - $\frac{مر^۲}{مر لا} + ا^۲ = ما$ کو حل کرو

یہاں امدادی مساوات $م^۲ + ا^۲ =$ کی اصلیں $م = \pm$ اسے ہیں
 اور عام حل ہے $ما = ا + جم + لا + فب + جب + لا$
 یا دوسری صورت میں $ما = با + جم (ا + لا + فب)$

مثال ۴ - $\frac{مر^۳}{مر لا} - \frac{مر^۲}{مر لا} + ۵ = ما$

یا (عف - ۱) (عف - ۲) = ما جہاں $\frac{مر}{مر لا}$ کی بجائے عف

لکھا گیا ہے۔

امدادی مساوات ہے $م^۳ - م^۲ + ۵م - ۲ =$
 یا $(م - ۱)(م - ۲) =$ یعنی اصلیں ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے $ما = (ا + فب + لا) (ا + و + لا)$

مثال ۵ - $(عف^۲ + ۱)(عف - ۱) = ما$

امدادی مساوات ہے $(م^۲ + ۱)(م - ۱) =$

جس کی اصلیں \pm ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے
 $ما = ا + جم + لا + فب + لا + فب + لا$

یا ما = بجم (لا + بی) + لے فو

مثال ۶۔ حل کرو (عف + عف + ا) (عف - ۲) ما = کو

امدادی مساوات ہے (م + م + ا) (م - ۲) =

اور اس کی اصلیں ہیں - $\frac{1}{4} \pm \frac{3}{2}$ اور ۲ اس لئے عام حل ہے

ما = ل فو $\frac{1}{4}$ جم لا $\frac{3}{2}$ + ل فو $\frac{1}{4}$ جب لا $\frac{3}{2}$ + ل فو $\frac{1}{4}$

یا ما = ب فو $\frac{1}{4}$ جم (لا $\frac{3}{2}$ + بی) + لے فو $\frac{1}{4}$

مثال ۷۔ (عف + عف + ا) (عف - ۲) (عف - ۵) ما = کو حل کرو

صریحاً اس کا عام حل ہے

ما = (ل + ل لا) فو $\frac{1}{4}$ جم لا $\frac{3}{2}$ + (ل + ل لا) فو $\frac{1}{4}$ جب لا $\frac{3}{2}$

+ (ل + ل لا + ل لا) فو $\frac{1}{4}$ + ل فو $\frac{1}{4}$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ \frac{۲}{۴} \frac{ما}{لا} - (ب + ا) \frac{ما}{لا} + ب ما =$$

$$۲۔ \frac{۳}{۴} \frac{ما}{لا} - ۱۶ \frac{ما}{لا} + ۱۱ \frac{ما}{لا} - ۶ ما =$$

$$۳۔ \frac{۳}{۴} \frac{ما}{لا} - ۹ \frac{ما}{لا} + ۲۳ \frac{ما}{لا} - ۱۵ ما =$$

$$۴ - \frac{۳}{۳} م = \frac{۳}{۳} م + ۳ = ۳ م + ۳ = ۵ م = \frac{۳}{۳} م$$

$$۶ - \frac{۲}{۲} م = م = (۱ - ع) (۲ - ع) م = ۰$$

$$۸ - (ع + ۱) (ع + ۱) م = ۰ \quad ۹ - (ع + ۱) (ع - ۱) م = ۰$$

$$۱۰ - (ع + ۱) (ع + ۱) م = ۰$$

$$۱۱ - (ع - ۱) (ع - ۲) م = ۰$$

$$۱۲ - (ع + ۱) (ع + ۱) م = ۰$$

خاص تکمیلی

۳۶ - اوپر ہم نے مساوات $ف (ع) م = ۰$ کے متم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

$$ف (ع) = ع + ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰$$

اور $۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰$ مستقل ہیں و، لا کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکمیلی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں $م = \frac{۱}{ف (ع)}$ و

یا $[ف (ع)]$ جہاں $\frac{۱}{ف (ع)}$ ایک ایسا عامل ہے کہ

$$ف (ع) = [ف (ع)] = ۰$$

۳۷۔ "عف" جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے
تفرقی احصائیں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی $\frac{م}{و}$) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے
(۱) جبر و مقابلہ کا تقسیمی قانون یعنی

$$\text{عف} (م + و + ه + ...) = \text{عف} م + \text{عف} و + \text{عف} ه + \dots$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی
عف (ج م) = ج (عف م)

(۳) قانون قوت نما یعنی

$$\text{عف}^{\text{م}} \text{عف}^{\text{ن}} م = \text{عف}^{\text{م}+\text{ن}} م$$

جہاں م، ن مثبت صحیح ہیں۔
پس رمز یا علامت عف جبر و مقابلہ کی باہمی ترکیب کے تمام
ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے، صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس
کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبر و مقابلہ کے جواب میں عاملوں
کا بھی ایک متناظر تماشل ہو گا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(م + و) = م + و + \frac{و(و-م)}{۲ \times ۱} + \frac{و(و-م)^۲}{۲ \times ۱} + \dots + \frac{و(و-م)^{ن-۱}}{۲ \times ۱} + \dots$$

اور ایسے ہی بغیر فرید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عف} + و) = \text{عف} + و + \frac{و(و-ن)}{۲ \times ۱} + \frac{و(و-ن)^۲}{۲ \times ۱} + \dots + \frac{و(و-ن)^{ن-۱}}{۲ \times ۱} + \dots$$

$$= \text{عف} + و + \frac{و(و-ن)}{۲ \times ۱} + \frac{و(و-ن)^۲}{۲ \times ۱} + \dots + \frac{و(و-ن)^{ن-۱}}{۲ \times ۱} + \dots$$

۳۸۔ عمل ف (عف) و لا
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر مثبت صحیح ہو تو
عف و لا = و لا

فرض کرو کہ عمل عف۔ ایسا ہے کہ
عف عف۔ می = می
اس تعریف کے مطابق عف۔ عمل تکمل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض
کرتے ہیں کہ عمل عف۔ می میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں
ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکمیلی کی تلاش ہے نہ کہ عام
سے عام تکمیلی کی)

اب چونکہ عف۔ و لا = عف۔ عف۔ و لا

اس سے ظاہر ہے کہ عف۔ و لا = و لا

اس لئے ظاہر ہے کہ ن کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے
عف و لا = و لا

۳۹۔ فرض کرو کہ ف (می) کوئی جملہ می کا ہے جو ی کی مثبت
یا منفی صحیح قوتوں میں (= حح۔ می۔ جہاں و ایک مستقل ہے
اور می پر منحصر نہیں ہے) پھیل سکتا ہے

تب ف (عف) و لا = (حح۔ عف) و لا

= (حح۔ عف۔ و لا)

= (حح۔ و لا)

= ف (ر) ^{ولا} = عمل ف (عف) ^{ولا} کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ر رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{\text{عف}^1 + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + 1}$ ^{ولا} کی قیمت معلوم کرو۔
اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1+2+2+3} \quad \text{ولا} \quad \frac{1}{15}$$

مثال ۲۔ $\frac{\text{عف} + 1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)}$ ^{ولا} کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے $\frac{2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{60}$ ^{ولا}

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$(1) \frac{1}{\text{عف} + 1} \quad \text{ولا} \quad (2) \frac{1}{(\text{عف} + 1)(\text{عف} + 2)} \quad \text{ولا}$$

$$(3) \frac{1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)} \quad \text{جز لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{عف}^2}{\text{عف}^3 - \text{عف}^2} = \frac{1}{\text{عف}^2} + \frac{1}{\text{عف}^3} + \frac{1}{\text{عف}^4}$

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

ف (عف^۱) جب م لا = ف (م^۱) جب م لا

ف (عف^۲) جب م لا = ف (م^۲) جب م لا

ف (عف) جہنم لا = ف (م) جہنم لا

۴۰۔ عمل ف (عف) و لا

فرض کرو کہ ما = و لا ما جہان ما، لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عف و لا = و لا

اس لئے یب نیز کے مسئلہ کی رو سے

ما = و لا (و ما + ج و عف ما + ج و عف ما + + عف ما)

جسے مسئلہ ثنائی کی طرح لکھنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۳۷]

عف و لا ما = و لا (عف + و) ما

جہاں ن مثبت صحیح ہے۔
اب فرض کرو کہ (عف + و) ما = لا

جسے ہم لکھ سکتے ہیں ما = (عف + و) لا

تب چونکہ عف و لا ما = و لا (عف + و) ما

یا عف و لا (عف + و) لا = و لا لا

اس لئے عف و لا لا = و لا (عف + و) لا

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

عف و لا لا = و لا (عف + و) لا

۴۱۔ جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$ف (عف) وُلا = ح (ر عف) وُلا$$

$$= ح (ر عف) وُلا$$

$$= وُلا ح (ر عف + ۱) لا$$

$$= وُلا ف (عف + ۱) لا$$

یعنی وُلا کو ہم عامل ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب لاسکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + ۱ لکھ دیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \frac{۱}{(عف-۱)۳} وُلا = وُلا \frac{۱}{عف۳} لا = وُلا \frac{۱}{۳ \times ۳ \times ۲} لا$$

$$\text{مثال ۲۔} \frac{۱}{عف۲-۴ عف+۴} وُلا جب لا = وُلا \frac{۱}{عف۲} جب لا = - وُلا جب لا$$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{۱}{(عف-۱)۳} وُلا لا، \frac{۱}{(عف-۱)۲} وُلا جب لا، \frac{۱}{عف-۱} وُلا لوک لا$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{(عف+۱-۱)(عف+۱-۲)} وُلا = \frac{۱}{(عف+۱-۲)(عف+۱-۳)} وُلا$$

$$۴۲۔ عمل ف (عف) جب م لا$$

$$\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

اور اس لئے عفا^۲ جب م لا = (-م^۲) جب م لا
اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$ف (عفا) \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

مثال ۱: $\text{و}^1 \text{ جب } ب \text{ لا} = \text{عفا}^1 \text{ و}^1 \text{ جب } ب \text{ لا} = \text{و}^1 (عفا + ف) \text{ جب } ب \text{ لا}$ [دفعہ ۴۱]

$$= \frac{\text{و}^1 - ۱ - \text{عفا}}{\text{و}^1 - ۱ - \text{عفا}^۲} \text{ جب } ب \text{ لا}$$

$$= \frac{\text{و}^1}{\text{و}^۱ + ب^۲} (۱ - \text{عفا}) \text{ جب } ب \text{ لا} \text{ [دفعہ ۴۲]}$$

$$= \frac{\text{و}^1 \text{ جب } ب \text{ لا} - ب \text{ جب } ب \text{ لا}}{\text{و}^۱ + ب^۲} = \text{و}^1 (\text{و}^۱ + ب^۲) \text{ جب } ب \text{ لا}$$

یسا (۱)

امثلہ

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکمیلی معلوم کرو

$\text{و}^1 \text{ جب } ب \text{ لا}$ ، $\text{و}^1 \text{ جب } ب^۲ \text{ لا}$ ، $\text{و}^1 \text{ جب } ب^۳ \text{ لا}$ ، $\text{و}^1 \text{ جب } ب^۴ \text{ لا}$

۲۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{۱}{\text{عفا}^۲ + ۲} \text{ جب } ۲ \text{ لا}، \frac{۱}{\text{عفا}^۲ + ۱} \text{ جب } ۱ \text{ لا}، \frac{\text{عفا}^۲ + ۱}{\text{عفا}^۲ + ۱} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

۳۔ جیب اور جیب التمام کی قوت ثنائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال
ف (عفا) جب م لا، ف (عفا) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

۴۳ = عمل $\frac{1}{ف (دعفا)}$ جب م لا

اب ہم عمل $\frac{1}{ف (دعفا)}$ جب م لا پر غور کریں گے جہاں ف (دی) ایک
ایسا تفاعل سی کا ہے کہ اسے ہم سی کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا
سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (دعفا) کو عفا کی قوتوں میں پھیلا یا گیا ہے اب
اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی
رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً $\frac{1}{1+عفا^۱+عفا^۲+عفا^۳} = \frac{1}{۶۴-۱۶+۴-۱}$ جب م لا = $\frac{1}{۵۱}$ جب م لا
لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا
ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل
مذکور کو اس طرح لکھو

$\frac{1}{ف (دعفا)} = \frac{1}{ف (دعفا^۱) + عفا^۱ + ف (دعفا^۲)}$ جب م لا

$\frac{ف (دعفا^۱) - عفا^۱ + ف (دعفا^۲)}{[ف (دعفا^۱) - عفا^۱] + [ف (دعفا^۲) - عفا^۲]} =$ جب م لا

$= \frac{ف (دعفا^۱) - عفا^۱ + ف (دعفا^۲) - عفا^۲}{[ف (دعفا^۱) - عفا^۱] + [ف (دعفا^۲) - عفا^۲]}$ جب م لا

$= \frac{ف (دعفا^۱) - عفا^۱ + ف (دعفا^۲) - عفا^۲}{[ف (دعفا^۱) - عفا^۱] + [ف (دعفا^۲) - عفا^۲]}$ جب م لا

یعور دیکھتے سے معلوم ہوگا کہ عملی طور پر عفا کی بجائے - مم فوراً اس منزل
 فہ (دعفا) + عفا (فادعفا) جب م لا کے بعد لکھ سکتے
 ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$1 \quad \text{جب م لا} \quad \frac{\text{فہ (دعفا) + عفا (فادعفا)}}{1}$$

یا
 فہ (دعفا) - عفا (فادعفا) جب م لا وغیرہ
 [فہ (دعفا)] - عفا [فادعفا] فوراً لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱- $\frac{\text{عفا}^3 + \text{عفا}^2 + \text{عفا} + 1}{1}$ جب ۲ لا کی قیمت
 معلوم کرو۔

$$1 \quad \text{یہ ہے} \quad \frac{\text{عفا}^3 + \text{عفا}^2 + \text{عفا} + 1}{1} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{3 - (1 + \text{عفا})}{1} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{عفا} - 1}{3 - \text{عفا}} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{دعفا} - 1}{15} \quad \text{جب ۲ لا}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{15} - \frac{1}{15} \quad \text{جب ۲ لا}$$

مثال ۲- $\frac{1}{3} - \frac{1}{15}$ اور لاجسم لا کی قیمت حاصل کرو

$$= \frac{1}{\text{حجم لا}} \text{عق}^1 + \text{عق}^2 + \text{عق}^3 + \text{عق}^4$$

[کچھ سے]

$$= \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{\text{عفا}} \cdot \text{حم لا}$$

$$\frac{2}{2} \frac{عف + 1}{عف - 1} \text{ حجم لا}$$

$$= \frac{100}{2} (عف + 1) = \frac{جحم لا}{2} - \frac{100}{2} (جحم لا - جب لا)$$

اشد

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

عَفْ لا حِبْ لا عَفْ
عَفْ-۱
عَفْ-۱ (عَفْ-۱) (عَفْ-۲)

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} + \frac{1}{\text{عف} + 1} = \frac{2}{\text{عف}}$$

۲۔ نہایت کروکہ $\frac{1}{(عق + د)}$ و = قولام کی کی ... کہ قول و قولا ... قول

جہاں تک تکمیلی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{f(D)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے

عمل $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$ و معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$ و جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$ و میں و متغیر لا کا ایک جبریہ،

منطق، صحیح تفاعل ہو تو ہم $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$ کو کسی نہ کسی طریقہ سے f کی صعودی قوتوں میں اس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ f کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً معلوم کرو $\frac{1}{1 + f + f^2} (1 + 2f + f^2)$

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1 - f}{1 - f^3} (1 + 2f + f^2)$$

$$= (1 - f + f^2 - f^3 + \dots) (1 + 2f + f^2)$$

$$= (1 + 2f + f^2) - (f + 2f^2 + f^3) = 1 - f$$

مثال ۲۔ نیز $\frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$ کی قیمت دریافت کرو

$$\text{جملہ} = \frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$$

$$= \frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$$

$$= \frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$$

$$\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۵} - (۱ - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \text{ عفا } ۱$$

$$\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۵} - (۱ - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \text{ عفا } ۱$$

مثلاً

ذیل کے عمل کرو۔

$$۱ - \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} = \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} \text{ عفا } ۱$$

$$۲ - \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} = \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} \text{ عفا } ۱$$

$$۳ - \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} = \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} \text{ عفا } ۱$$

۴۵۔ ایسی صورتیں جن میں یہ طریقے ناکام رہتے ہیں۔
خاص تکمیلی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں
استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ
طریقے کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ
ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

$$۴۶۔ مساوات \frac{۱}{۱} = ۱ = ۱ \text{ کو حل کرو}$$

مستم تفاعل ۱ کو ہے۔

خاص تکمیلی حاصل کرنے کے لئے \frac{۱}{۱} کی قیمت معلوم ہونی

چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۱} = ۱$$

اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۴۱ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حال ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} = \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف}} = 1 = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}}$$

جو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل $\frac{1}{\text{عف} - 1}$ کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱ + م) لکھنے سے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} = \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{عف} - 1} = \frac{1}{\text{لا (۱ + م)}} = \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}}$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا فو}} + \frac{1}{\text{لا فو}^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} = \left[\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا فو}} + \frac{1}{\text{لا فو}^2} + \dots \right]$$

اس جملہ میں سے حصہ ہا $\frac{1}{\text{لا}}$ لا تنہا ہی ہو جاتا ہے لیکن اسے

ہم متہم تفاعل ۱ و ۱ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ ۱ کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم ۱ + $\frac{1}{\text{لا}}$ کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ ۱ کا ایک حصہ منفی اور غیر تنہا ہی فرض کیا جاسکتا ہے جو رقم $\frac{1}{\text{لا}}$ کا توازن کر دے گا۔

پس لا فو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

باقی رقموں میں مہ شریک ہوتا ہے جو مہ کے لا تنہا کم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

$$\text{پس مساوات کا پورا عمل } 1 = 1 + \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}} \text{ ہے۔}$$

مثال ۲۔ مساوات $\frac{r^2}{r^2 - 1} + m = \frac{1}{r} + \text{جب } 2 \text{ لا کو حل کرو}$

مستم تفاعل صریحاً یہ ہے $m = \frac{1}{r} + \text{جب } 2 \text{ لا} + \text{ب جم } 2 \text{ لا}$
 خاص تکمیلی کے دو حصے ہیں $\frac{1}{r^2 - 1}$ تو یا $\frac{1}{r}$ تو اور $\frac{1}{r^2 - 1}$ جب 2 لا
 دوسرے حصہ میں اگر دفعہ m کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو حاصل ہوگا
 جب 2 لا یعنی ∞ پس یہ قاعدہ ناکام رہے گا۔

اب ہم $\frac{1}{r^2 - 1}$ جب 2 لا $(1 + m)$ کی انتہا معلوم کرتے ہیں جبکہ
 $m = 0$

یہ جملہ $= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1 + m)}$ جب $(2 \text{ لا} + 2 \text{ لا})$

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})}$ (جب 2 لا جم 2 لا + جم 2 لا جب 2 لا)

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})} + \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})} + \dots$ [جب 2 لا $(1 + \frac{1}{r} + \dots)$ + جم 2 لا $(2 \text{ لا} - \dots)$]

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})} + \dots$ کی قوتیں

$=$ (ایک ایسی رقم جو مستم تفاعل میں شریک کر دی جاسکتی

ہے) $-\frac{1}{r} + \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})} + \dots$ (رقمیں جو m کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)

پس تفرقی مساوات کا پورا حل ہے

$m = \frac{1}{r} + \text{ب جم } 2 \text{ لا} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r(2 \text{ لا} - 2 \text{ لا})}$

مثال ۳۔ مساوات (عفا + عفا۳) (دعفا - ا) = ما = فو + فو۲ + جب لا + لا۲ کو حل کرو۔

اس صورت میں متم تفاعل صیرجاً ۱ + ۱ + ۱ فو + فو۲ + (۱ + ۱ + ۱) فو۳ ہے۔
خاص تکمیلی کے چار حصے ہیں یعنی

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{1}{فو} = \frac{1}{فو۲} = \frac{1}{فو۳} = 1 \times \frac{1}{عفا۲} \times \frac{1}{عفا} = \frac{1}{عفا۲} = \frac{1}{عفا}$$

$$\left[\text{یا ملاحظہ ہو } \frac{1}{(دعفا - ا)} = \frac{1}{فو} = \frac{1}{فو۲} = \frac{1}{فو۳} = \frac{1}{عفا۲} = \frac{1}{عفا} \right]$$

= (ایک حصہ جو متم تفاعل میں چلا جاتا ہے)

$$+ \frac{1}{عفا} + (ایسی رقمیں جو ص کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)$$

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{1}{فو} = \frac{1}{فو۲} = \frac{1}{فو۳}$$

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{1}{فو} = \frac{1}{فو۲} = \frac{1}{فو۳} = \frac{1}{عفا۲} = \frac{1}{عفا}$$

$$\frac{1}{عفا۲} = \frac{1}{عفا} = \frac{1}{عفا۳} = \frac{1}{عفا۴} = \frac{1}{عفا۵} = \frac{1}{عفا۶} = \frac{1}{عفا۷} = \frac{1}{عفا۸} = \frac{1}{عفا۹} = \frac{1}{عفا۱۰}$$

$$= (۳ جب لا - جم لا) / ۲۰$$

اور اخیر میں

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{1}{فو} = \frac{1}{فو۲} = \frac{1}{فو۳} = \frac{1}{عفا۲} = \frac{1}{عفا}$$

$$= \frac{1}{عفا} = \frac{1}{عفا۳} = \frac{1}{عفا۴} = \frac{1}{عفا۵} = \frac{1}{عفا۶} = \frac{1}{عفا۷} = \frac{1}{عفا۸} = \frac{1}{عفا۹} = \frac{1}{عفا۱۰}$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (1 - \frac{\text{عف}^2}{9} + \dots) (1 + 2\text{لا} + 4)$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (1 + 2\text{لا} + 4 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\text{لا} + \frac{2}{9})$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (\frac{22}{9} + \frac{10}{3}\text{لا} - \frac{22}{9})$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (\frac{22}{9} + \frac{5}{3}\text{لا} - \frac{22}{9})$$

اس لئے پورا حل ہے

$$= 1 + \frac{1}{2}\text{فو} - \frac{1}{3}\text{لا} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\text{لا})\text{فو}$$

$$+ \frac{1}{8}\text{لا}^2\text{فو} + \frac{1}{10}\text{فو}^2 + \frac{3}{20}\text{جب لا۔ جم لا} + \frac{5}{9}\text{لا}^2 + \frac{22}{24}$$

مثال ۴۔ مساوات $\frac{\text{فو}^2}{\text{فو لا}} = 1$ لا جب لا کو حل کرو

شتم تفاعل (م، ت) ہے $\frac{1}{2}\text{جب لا} + \frac{1}{2}\text{جم لا} + \frac{1}{3}\text{جب لا} + \frac{1}{2}\text{جم لا}$

(خاص سکسلی) (خ، ک) ہے $\frac{1}{\text{عف}} = 1$ لا جب لا جو خ کا سر ہے

$$\frac{1}{\text{عف}} = 1 \text{ لا فو حلا میں}$$

$$\text{یعنی فو} \frac{1}{(\text{عف} + \text{خ})} = 1 \text{ لا میں}$$

$$\text{یعنی فو} \frac{1}{2\text{خ عف} - 2\text{عف}} = 1 \text{ لا میں}$$

یعنی $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} = 0$ لا میں

یعنی $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} = 0$ لا میں

یعنی $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} = 0$ لا میں

پس خاص تکملی ہے $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} = 0$ لا جب لا

اور پورا حل ہے

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} = 0$$

امثلہ

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکملی حاصل کرو

(۱) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ جب لا (۲) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ جم ۲ لا

(۳) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ جنبر لا (۴) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ لا

(۵) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ لا (۶) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ (جنبر لا + جب لا)

(۷) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ (لا + جنبر لا)

(۸) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}$ جم ۲ لا جم ۳ لا

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{لا}{فر$ کی بجائے ہم عف کہتے ہیں، اس طرح سے حاصل ہوگا

$$\frac{لا}{فر} = \left(\frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱} \right) = لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} + (۱-ن) \frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱}$$

$$یا لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (لا - \frac{فر}{لا}) (۱+ن) \frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱}$$

$$= (عف-ن+۱) لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱}$$

اب ن کو بالتواتر ۲، ۳، ۴، ... کے مساوی رکھنے سے

$$لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (عف-۱) لا \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (عف-۱) عفا$$

$$لا^۲ \frac{فر^۲-۱}{فر^۲-۱} = (عف-۲) لا^۲ \frac{فر^۲-۱}{فر^۲-۱} = (عف-۲)(عف-۱) عفا$$

اس لئے عام طور پر

$$لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (عف-ن+۱)(عف-ن+۲)....(عف-۱) عفا$$

یا ان عملوں کی ترتیب الٹنے سے

$$عف (عف-۱) (عف-۲)....(عف-ن+۱) عفا$$

مثال۔ ذیل کی تفرقی مساوات کو حل کرو

$$لا^۳ \frac{فر^۳-۱}{فر^۳-۱} + لا^۲ \frac{فر^۲-۱}{فر^۲-۱} + لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = ۳$$

رکھو لا = نو، اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$عف (عف-۱) (عف-۲) عفا + ۲ عف (عف-۱) عفا + ۳ عفا = ۳$$

$$یا \quad (عفا^۳ - عفا^۲ + عفا^۱ - عفا^۰) = ۱ = فو^۲ + فو^۱$$

يعني $(ع - ١) (ع + ٣) = ٦$ $ع^٢ + ٢ع - ٣ = ٦$ $ع^٢ + ٢ع - ٩ = ٠$ $ع = ٣$ $ع = -٣$

جس سے حاصل ہوتا ہے

س سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = اوت + بجم ت + ج جب ت + \frac{توت}{۴} + \frac{توت}{۴}$$

یا ما = اولا + ب جم (اسم لوک لا) + ج جب (اسم لوک لا) + $\frac{لا}{۶}$ + $\frac{لا لوک لا}{۴}$

۱۱ مثله

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$1 - \frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r} + \frac{a}{r} = 1$$

۲۔ لا' فر' م' + لا' فر' م' + ق' م' = (لوک لا') + لا' جب لوک لا'

ۛچق قوڪ لا

$$۳- لا^۲ \frac{فر۱}{فر لا^۲} + لا^۳ \frac{فر۲}{فر لا^۲} + لا \frac{فر۳}{فر لا} + لا = لا + لوک لا$$

$$n - \frac{a^3}{r^3} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r} = b + \frac{a}{r} = b + \frac{a^2}{ra}$$

$$5. - (1 + b^2) \frac{a}{a^2} + b(1 + b^2) \frac{a}{a^2} + c^2 = 0.$$

باب پنجم

قائم مریات، متفرق مساواتیں

قائم مری

۴۸۔ کاربیشری مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ل) =۔ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل لا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہوتا جائے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ لا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

$$ف (لا، ما، ل) =۔$$

$$جف ف + \frac{جف ف}{جف ما} \times \frac{مر ما}{مر لا} =۔$$

$$فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط ف (لا، ما، ل) =۔$$

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اس نقطہ پر ان دو منحنیات کے تماس علی القوائم ہیں۔
پس اگر اس نقطہ تقاطع کے رواں محدود بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے
ضام، عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے
اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}، \text{عا} = \text{ما}، \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} = \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{وہ (ضا، عا) = } \left(\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} \right) =$$

اور اس کو تکمیل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مرئیات کا قبیل حاصل ہوگا۔

اس لئے قاعدہ یہ ہے۔
مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ کی بجائے

$$\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} \text{ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔}$$

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو

تو وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر تماس کے ساتھ بناتا ہے $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ ہوگا،

اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$ کی

$$\text{بجائے } \frac{1}{r} \text{ لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔}$$

۵۰۔ دائروں کے قبیل $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲ \text{ لا} \dots (۱)$
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مرئیات

کا نظام معلوم کرو۔

$$\text{یہاں } لا + ما = \frac{ما}{فر لا} = ۱$$

اور ۱ کو ساقط کرنے سے $لا^۲ + ما^۲ = ۲ لا (لا + ما) \frac{ما}{فر لا}$

$$\text{یعنی } لا^۲ + ۲ لا ما \frac{ما}{فر لا} - ما^۲ = \dots\dots\dots (۲)$$

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$$لا^۲ - ۲ لا ما \frac{ما}{فر لا} - ما^۲ = \dots\dots\dots$$

$$\text{یا } ما^۲ + ۲ لا ما \frac{ما}{فر لا} - لا^۲ = \dots\dots\dots$$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں $ما = ۱$ و $لا$ رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ $لا$ ، $ما$ کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے اس لئے اس کا تکمیلی ہوگا

$$ما^۲ + لا^۲ = ۲ لا ما$$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور $لا$ کو مبدأ پر مس کرتا ہے۔

$$\text{مثال ۲۔ منحنیات } \frac{لا^۲}{لا + لہ} + \frac{ما^۲}{ب + لہ} = ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو جہاں $لہ$ اس قبیل کا متبذل ہے۔

$$\text{یہاں } \frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ب + لہ} = \dots\dots\dots (۲)$$

اور ان دو مساواتوں سے $لہ$ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے لا (ب^۱ + ل^۱) + ما (ا^۱ + ل^۱) =

$$\text{یا لہ} = \frac{\text{ب}^۱ \text{ لا} + \text{ا}^۱ \text{ ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

$$\text{پس ا} + \text{لہ} = \frac{\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱}{\text{لا} + \text{ما}}$$

$$\text{اور ب} + \text{لہ} = \frac{\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱}{\text{لا} + \text{ما}}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$۱ = \frac{\text{ا}^۱ (\text{لا} + \text{ما})}{\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱} - \frac{\text{لا}^۱ (\text{لا} + \text{ما})}{\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱}$$

$$\text{یا لا}^۱ - \text{ا}^۱ + \text{لا} \text{ ما} (\frac{۱}{\text{ا}^۱} - \frac{۱}{\text{ب}^۱}) = \text{ا}^۱ - \text{ب}^۱ \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے ما کی بجائے $\frac{۱}{\text{ا}}$ لکھنے سے مطلوبہ مریات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^۱ - \text{ا}^۱ + \text{لا} \text{ ما} (\frac{۱}{\text{ا}} + \frac{۱}{\text{ب}}) = \text{ا}^۱ - \text{ب}^۱ \dots\dots\dots (۴)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے اس لئے اس کا انگلی بھی وہی ہوگا

$$۱ = \frac{\text{ا}^۱}{\text{ا}^۱ + \text{ب}^۱} + \frac{\text{لا}^۱}{\text{ا}^۱ + \text{ب}^۱}$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم ماسک ہیں۔

مثال ۳۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے صورتی خطوط کے قبیل

لہ = ا (۱ - جم طہ) کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\frac{r}{r} = 1$ جب طہ
اور ۱ کو ساقل کرنے سے

$\frac{r}{r} = \frac{1 - \text{جم طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{مس } \frac{1}{2}$
اس لئے قائم مریات کے قبیل کے لئے

$$- \frac{1}{r} = \frac{r}{r} = \text{مس } \frac{1}{2}$$

یا لوک ۱ = ۲ لوک جم طہ + مستقل

یا ۱ = ۲ (۱ + جم طہ)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرون کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

امثلہ

۱۔ ۱ کی مختلف قیمتوں کے لئے مکافیات $1^2 = 2$ ۱ لا کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ ۱ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متشابہ ناقصوں کے

قبیل $\frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1$ کے قائم مریات کا نظام
 $1^2 = 1$ ۱ مابا ہے۔

۳۔ ۱ کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں

کے قبیل ۱ = ۱ و ۱ م م کے قائم مریات معلوم کرو۔

۴۔ ۱ کی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکافیوں

$\frac{1^2}{r} = 1 + \text{جم طہ}$ کے قائم مریات کا قبیل معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ لا ما = ۱ \\ ۳ لا ما - ۲ ما = ب \end{array} \right.$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجباً عہ = ۱ (جم طہ - جم عہ)

اور رجباً یہ = ۱ (جنز یہ - جم طہ)

علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = می + خ و تو ثابت کرو کہ

$$می = ۱ اور و = ب$$

قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل

قبیل مہ منز لا - قمر لا جم ما = مستقل کے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

۵۔ مساوات $\frac{فری}{طہ} + می = ف (ی)$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

۲ $\frac{فری}{طہ}$ کے ساتھ ضرب دینے اور تکمیل کرنے سے

$$\left(\frac{فری}{طہ} \right) + می = ۲ ف (ی) + ۱$$

جسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں \int $\frac{دری}{۲ + ۱ (دری) - ۱ (دری)} = طہ + ب$
 اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲۔ $\frac{دری}{در طہ} + ن ا ی = ف (طہ)$ مستقل سروں والی
 ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے
 ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔
 جب ن طہ کے ساتھ ضرب دو جو مشکل جزو ضربی ہے
 تکمیل کرنے سے

جب ن طہ $\frac{دری}{در طہ} - ن ی$ جم ن طہ = $ف (طہ)$ جب ن طہ $\frac{دری}{در طہ} +$
 اسی طرح جم ن طہ مستکمل جزو ضربی ہے اور اس کے جواب
 میں پہلا تکمیلی

جم ن طہ $\frac{دری}{در طہ} + ن ی$ جب ن طہ = $ف (طہ)$ جم ن طہ $\frac{دری}{در طہ} + ب$
 $\frac{دری}{در طہ}$ کو ساقط کرنے سے

ن ی = $ف (طہ)$ جب ن طہ = $ف (طہ) + ب$ جب ن طہ

۵۳۔ ایک ایسے جسم کی مساوات حرکت جس کی کمیت بدلتی ہو
 اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$\frac{دری}{درت} = ف (لا) = سا (لا)$

اور اس کا مکمل جزو ضربی فہ (لا) فرت ہے۔

کیونکہ فہ (لا) فرت فرت {فہ (لا) فرت} = ساد (لا) فہ (لا) فرت
جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{f} = \{فہ (لا) فرت\} = ساد (لا) فہ (لا) فرت$

$$یا \frac{1}{f} = \frac{فہ (لا) فرت}{ساد (لا) فہ (لا) فرت + 1} = فرت$$

متغیر جدا ہو گئے ہیں پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad \frac{فرما}{فرلا} = ف (لا + ب م)$$

فرض کرو کہ $لا + ب م = ی$

$$تب \quad لا + ب م = \frac{فرما}{فرلا}$$

$$پس \quad لا + ب م (دی) = \frac{فری}{فرلا}$$

$$اور \quad فرلا = \frac{فری}{لا + ب م (دی)}$$

$$یا لا + ج = \frac{فری}{لا + ب م (دی)}$$

مثال ۲۔ $لا^۲ - \frac{ما^۲}{حرا} (ما + لا حرا) = ۱$
 رکھو لا ما = ی

تب $ما + لا = \frac{حرا}{حری}$

$لا (لا - \frac{حری}{حرا}) = ۱ + \frac{حری}{حرا}$

یا $ی = لا + \frac{حری}{حرا}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے
 $لا ما = لا ج + \frac{۱}{ج}$

مثال ۳۔ $فوا^۲ (لا + ما) = (۱ - \frac{حرا}{حری})^۲ = فوا^۲ + فوا^۲ (\frac{حرا}{حری})^۲$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $فوا = عا$ اور $فولا = ضا$
 اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$(فوا - فولا) (\frac{حرا}{حری})^۲ = ۱ + (\frac{فوا}{فولا} \frac{حرا}{حری})^۲$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$عا - ضا = \frac{حرا}{حری} = ۱ + (\frac{حرا}{حری})^۲$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

$عا = ج ضا + ۱ + ج^۲$

یا $فوا = ج فولا + ۱ + ج^۲$

مثال ۴۔ $\overline{لا\ ما} = \left(\frac{\overline{لا}}{1}\right) + (\overline{لا} - \overline{لا\ ما} - \overline{ب}) \frac{\overline{لا}}{1} - \overline{لا\ ما} =$

(ہندسہ محجمات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو $\overline{لا} = \overline{لا\ سی}$ اور $\overline{لا\ ما} = \overline{لا\ ت}$

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$\overline{لا\ سی\ ت} = \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}\right) + (\overline{سی} - \overline{لا\ ت} - \overline{ب}) \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}\right) - \overline{لا\ سی\ ت} =$

یا $\overline{لا\ سی} = \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}\right) + (\overline{سی} - \overline{لا\ ت} - \overline{ب}) \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} - \overline{لا\ سی\ ت} =$

یعنی $\overline{لا\ سی\ ت} = \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} + 1\right) \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} - \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} + 1\right) \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} - \overline{لا\ سی\ ت} =$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\overline{لا\ سی} = \overline{لا\ ت} - \overline{ب} \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1 + \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

$\overline{لا\ سی\ ت} = \overline{لا\ ت} - \overline{ب} \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1 + \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}}$

یا $\overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ما} = \overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ما} = \overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ما} =$

اس کا تادر حل ہے $\overline{لا} = \overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ما} = \overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ما} =$

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔ $\overline{لا\ ما} = \left(\frac{\overline{لا\ ما}}{1}\right) + \left(\frac{\overline{لا\ ما}}{1} + 1\right) \frac{\overline{لا\ ما}}{1} - \overline{لا\ ما} =$ کو حل کرو

فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\frac{م^2}{17 + 14\lambda} = ق$$

اس طرح لا سیدھے تکمل سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہو سکتا ہے

$$اب \quad \frac{\frac{م^2}{ق}}{17 + 14\lambda} = \frac{م^2}{ق}$$

$$اور \quad \frac{م^2}{ق} = \frac{م^2}{ق} - \frac{م^2}{ق(17 + 14\lambda)}$$

$$پس (17 + 14\lambda) \frac{م^2}{ق} = \frac{م^2}{ق} - \frac{م^2}{ق}$$

$$پس مساوات معلوم اس طرح کی مساوات $\frac{م^2}{ق} + ق = 0$$$

میں تحویل ہو جاتی ہے جس کا حل ہے

$$م = 17 + 14\lambda$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم حاصل ہوتا ہے۔

[اگر مثبت ہو تو

$$\frac{1}{17} = \frac{ق}{17 + 14\lambda}$$

$$\frac{1}{17} = ق (17 + 14\lambda)$$

$$اگر منفی ہو تو $\frac{1}{17} = \frac{ق}{17 - 14\lambda}$$$

یعنی $\frac{1}{x-1}$ جب $(x-1) = t$ [مثال ۶۔ ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سروں والی خطی مساواتیں ہیں)]

$$۴ = \frac{۴}{x-1} + ۹ = \frac{۴}{t} + ۹$$

$$۳ = \frac{۳}{x-1} + ۷ = \frac{۳}{t} + ۷$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، ع $\frac{۴}{t}$ کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۴ = t(۹ + ع) + ۱۱$$

$$۳ = t(۷ + ع) + ۱۱$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۷ اور ۹ ع $+ ۳۸$ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ۷ کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے،

$$[۴(۷ + ع) + ۱۱] - [۳(۹ + ع) + ۱۱] = ۷ - ۹$$

$$۷ - ۹ = ۳۸ - ۵۸$$

$$یا (۷ + ع) - (۹ + ع) = ۳۸ - ۵۸$$

$$جس سے ملتا ہے $۷ - ۹ = ۳۸ - ۵۸$$$

$$یا $۷ - ۹ = ۳۸ - ۵۸$$$

ما کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{۴}{t}$ کو اصلی مساواتوں سے ساقط

کہتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۲ لا = ۷ ت - ۹ ق$$

$$\text{پس } ۷ ت = ۷ ت - ۹ ق - ۲ لا - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$$

$$= ۷ ت - ۹ ق - ۲ (۱ ق + ۲ ب + ۳ ت) + \frac{۱۹ ت}{۳} - \frac{۵۶ ق}{۹} - \frac{۲۹ ق}{۷}$$

$$- (۱ ق - ۲ ب - ۳ ت) + \frac{۱۹ ت}{۳} - \frac{۲۹ ق}{۷}$$

$$= ۱ ق - ۲ ب - ۳ ت + \frac{۱۹ ت}{۳} - \frac{۵۵ ق}{۹} + \frac{۲۴ ق}{۷}$$

$$\text{پس } لا = ۱ ق - ۲ ب - ۳ ت + \frac{۱۹ ت}{۳} - \frac{۵۶ ق}{۹} - \frac{۲۹ ق}{۷}$$

$$۷ ت = ۱ ق - ۲ ب - ۳ ت + \frac{۱۹ ت}{۳} - \frac{۵۵ ق}{۹} + \frac{۲۴ ق}{۷}$$

[طالب علم فرما کے استقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ

مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۳ = ۱۲ لا -$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} - ۵ = ۹ ت -$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں

$$(عفا + ۱۶) لا + ۳ عفا = ما$$

$$- ۵ عفا لا + (عفا + ۹) ما =$$

ان مساواتوں پر بالترتیب عفا + ۹ اور ۳ عفا کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$[(عفا + ۱۶) لا + ۳ عفا + (عفا + ۹) ما] - ۵ عفا لا =$$

$$یا (عفا + ۳۰ عفا + ۱۴۴) لا =$$

$$یعنی (عفا + ۴) (عفا + ۳۶) لا =$$

جس سے لا = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ج جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت
ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفریق کرو
اور دوسری کے ساتھ اس سے تفریق کرو اس طرح ملیگا

$$\frac{۳۱}{۲۷} = \frac{۳۱}{۲۷} لا + \frac{۳۱}{۲۷} لا$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے (بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے)

$$ما = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ج جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت$$

امثلہ

$$۱- ۲ لا ما - \frac{۳۱}{۲۷} ما = (۱- لا) ما = لا$$

$$۲- ۲ قطا ما - \frac{۳۱}{۲۷} ما + ۲ جب ۲ ت = \left(\frac{۳۱}{۲۷} ما \right) + مس ما = لا$$

$$۳- (۱+ ب لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما + (۱+ ب لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما + ب ما = لا$$

$$۴- (۱+ لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما + ۲ لا (۱+ لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما = ما$$

$$۵ - (۱ - لا^۲) \frac{لا^۲}{لا} - لا \frac{لا}{لا} + ن^۲ = ۰$$

$$۶ - \frac{لا}{لا} = لا - لا (لا - لا)$$

$$۷ - \frac{لا}{لا} = ۲ جب \frac{لا - لا}{۲} جم \frac{لا + لا}{۲} جم \frac{لا}{لا} جم \frac{لا}{لا}$$

۸ - ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکلی حاصل کرو

$$(۱) \frac{لا^۳}{لا} - ۳ \frac{لا^۲}{لا} + ۹ \frac{لا}{لا} + ۱۳ = ۰$$

$$(ب) \frac{لا^۲}{لا} + ۶ \frac{لا}{لا} + ۹ = ۲۵ جم لا$$

$$(ج) لا^۲ \frac{لا}{لا} - ۵ لا \frac{لا}{لا} + ۱۰ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۹ - ذیل کی ہمزاو مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{لا^۲}{لا} + ۱۵ + ۳ ی + ۲۰ = ۰$$

$$\frac{لا^۲ ی}{لا} + ۲ + ۱۰ ی + ۴ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۱۰ - اس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اس نقطہ کے محدودوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱ - ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحناء ایسے بدلتا ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲ - جس منحنی میں انحناء کے نصف قطر کا ظل محور ما پر مستقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad s \infty \text{ لوک مس } \left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$(2) \quad m \infty \text{ لوک قط } \frac{\pi}{n}$$

نوٹ۔ (۱) میں s قوس کا طول ہے اور m محاس کا

میلان ہے محور کا کے ساتھ۔



جوابات

صفحہ (۶)

$$۱- لا مس لا۔ لوک قط لا = ماس ما۔ لوک قط ما + ج$$

$$۲- \frac{لا-ما}{۳} + \frac{لا-ما}{۲} + لا = ما = ج$$

$$۳- لا ۲ لا ما + لا + ما + ج (لا + ما + ا) = ا$$

$$۵- لوک [ا + ما] = لوک لا + مس لا + ج$$

$$۶- ۲ (و-و) = لا + ج$$

$$۹- (۱) ما = ج و (۲) ما = لا ۲ لا + ج$$

$$(۳) ر (ج-ط) = ا (۴) ر = ا ط + ج$$

$$۱۰- لا = لا-و + \frac{۱}{۲} لوک \frac{ا-و-ما}{ا+و-ما} اگر ما = ا جبکہ لا =$$

صفحہ (۱۱)

مس لا ۲ مس لا

$$۱- لا ۲ ما و = و + ج$$

$$۲- (و + با) ما = ا جب با لا۔ با جم با لا + ج و لا$$

$$۳ - \text{رط} = ۱ + \frac{\text{ط} + ۲۰}{۲ + ۵} + \text{ج}$$

$$۴ - \text{م لا م} = \text{ما} + \text{ج} \quad ۵ - \text{لا فو} = \text{مس} + \text{ما} + \text{ج}$$

$$۶ - \text{ما فو} = \text{لا} + \text{ج} \quad ۸ - \text{لا} + \text{ما} + \text{لا} + \text{لا} = \frac{۱}{۲} + \text{ج} = \text{فو} + \frac{۲۲}{۲}$$

$$۹ - \frac{۱}{\text{لا م}} = \frac{۱}{\text{لا م}} + \text{ج} \quad ۱۰ - \left(\frac{۱}{\text{لا م}} \right) = \frac{۱}{\text{لا م}} + \text{ج}$$

$$۱۱ - \frac{۱}{\text{ما}} = \frac{۱}{\text{ما}} + \text{ج} \quad ۱۲ - \frac{۱}{\text{لا م}} = \frac{۱}{\text{لا م}} + \text{ج}$$

$$۱۳ - \frac{۱}{\text{لا م کی}} = \frac{۱}{\text{لا م کی}} + \text{ج} \quad ۱۴ - \text{فو} = \text{فو} + \text{ج}$$

$$۱۵ - \frac{۱}{\text{ر}} = \frac{۱}{\text{ر}} + \text{ج} \quad ۱۶ - \frac{۱}{\text{ر}} = \frac{۱}{\text{ر}} + \text{ج}$$

$$۱۸ - (۱) \frac{۱}{\text{لا}} = \frac{۱}{\text{لا}} + \text{ج} \quad (۲) (\text{ر} + \text{ب}) \text{فو} = \text{ج} + \text{ب لا} + \text{ج ب لا} + \text{ج فو}$$

$$(۳) \text{ج ب م} = \frac{۱}{\text{لا}} + \text{ج} \quad (۴) \text{ف (ما)} + \text{ف (لا)} + ۱ = \text{ج} + \text{فو}$$

صفحہ (۱۷)

$$۱ - \frac{۱}{۲} \text{لوک} (\text{و} + \text{و} + ۱) + \frac{۱}{۲} \text{لوک} + \frac{۱ + ۲ + ۱ - ۱}{۲ + ۱ + ۱} + \text{لوک لا} = \text{ج چاں} = \frac{۱}{۲}$$

$$۲ - \frac{۱}{۲} \text{لوک} (\text{و} + \text{و} + ۳) + \frac{۱}{۲} \text{لوک} + \frac{۱ + ۲ + ۱ - ۱}{۲ + ۱ + ۱} + \text{لوک لا} = \text{ج}$$

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{ج} = 1 \quad \text{ع} = 1 \quad \text{لا} = 1 \quad \text{ما} = 1 \quad \text{ع} = 1 \quad \text{ع} = 1 \quad \text{ع} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اور لا} = \frac{1}{2} \text{ ج} \\ \text{و} \frac{1}{2} \text{ ع} \end{array} \right.$$

۵۔ ع حاصل اسقاط ذیل کی مساواتوں کا

$$1 = \text{لا} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ج}$$

اور لوک لا + ع + (ب - ۱) + ج = ۱

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{مستقل}$$

صفحہ (۲۰)

$$1 - (\text{ما} - \text{لا}) = \text{ج} = (\text{ما} + \text{لا}) \quad 2 - (\text{ما} - \text{لا}) = \text{ج} = (\text{ما} + \text{لا})$$

$$3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لوک} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{لوک} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$+ \text{لوک} (\text{لا} - 1) = \text{ج}$$

$$4 - (\text{ب} + 1) \text{ لوک} (\text{ما} - \text{لا} + 1) + (\text{ب} - 1) \text{ لوک} (\text{ما} + \text{لا} - 1) = \text{ج}$$

$$5 - \text{لا} - \text{ما} + \text{لوک} (\text{لا} + \text{ما}) = \text{ج}$$

$$6 - \text{ما} - 3 - \text{لا} = \text{لوک} (\text{ما} + \text{لا} + 3 + 2) + \text{ج}$$

$$7 - 3 - \text{لا} + \text{ما} + 3 - \text{ما} - 1 - \text{لا} - 1 - \text{ما} + 3 = \text{ج}$$

$$8 - \text{لا} + \text{ما} - 3 - \text{ما} - 3 - \text{لا} + 3 + \text{ما} + 3 = \text{ج}$$

صفحہ (۲۵)

$$۱- مآ = ۱ + ج \quad ۲- م = م + \frac{لا}{۲} + لوک لا + ج$$

$$۳- م + م + \frac{۲}{۳} (لا + ۱) - \frac{۳}{۲} (۱ + لا) = ج$$

$$۴- لا (لا + ۱۲) = ج \quad \frac{۱۲}{۱}$$

$$۵- ۴ لا = مآ + ۳ لا - م - \frac{۳}{۲} لوک (۱ + ۱۲) + ج$$

$$۶- جم = \left\{ \frac{۱ - (لا - ۱) - م}{لا - ۱} \right\} = ۱ - لا$$

$$۷- لا = \frac{۳}{۲} (ع + ۲ ب + ج) \quad م = ع + ۲ ب$$

$$۸- م = \frac{۳}{۲} (ق + ۲ ب + ج) \quad لا = ق + ۲ ب$$

صفحہ (۲۸)

$$۱- م = ج + لا \quad لا + م = م$$

$$۲- م = ج + لا \quad مآ + م = لا$$

$$۳- م = ج + لا \quad مآ + (۱ - ن) = لا$$

$$۴ - م = ج لا + لا ج + ج ب ، \frac{لا}{ب} + \frac{م}{ب} = ۱$$

$$۵ - م = (لا - ج) ج - ج ، (لا - ج) م = م$$

$$۶ - (م - ج لا) (ج - ۱) = ج ، لا + م = ۱$$

صفحہ (۳۰)

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - م = ع لا + ع \\ ۲ - م = ج لا + لا ع \\ لا = \frac{ع - ع - ج}{(۱ - ع)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۳ - م = ع لا + ع \\ لا (۱ - ع) = ع - ع + ج \\ ۴ - م = (ع + ع) لا + \frac{۱}{ع} \\ ع لا = ۱ + ۱ + ع \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۵ - م = (ع + ع) لا + \frac{۱}{ع} \\ ع لا = (۱ - ع) + ۱ + \frac{ع(۱ - ع)}{ع} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۶ - م = ع لا + ع \\ ع لا = ۱ + \frac{ع}{۱ + ع} \end{array} \right.$$

$$۵ - (لا - ا) + (ما - ب) = ر \quad ۶ - لا + ب = س \quad \frac{ر}{\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - \frac{۱}{۲}}$$

$$۷ - ما + ب = س \quad \frac{س}{\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - \frac{۱}{۲}} = لا$$

$$۸ - \frac{ب}{لا} = س \quad \left(\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ما} \right) \frac{س}{۲} = لا + ب$$

$$۹ - ما = ب \quad \frac{لا + ما + ۱}{ب}$$

$$۱۰ - لا + ۱ + \frac{\sqrt{ما - ۱}}{ما} + جب = ما$$

$$۱۱ - ما = ب \quad لا - ۱ = لا لوک لا$$

صفحہ (۴۲)

$$۱ - لا = ما = ۱ + لا + ب + لا + ج$$

$$۲ - (لا + جب لا) = ما = جم لا + لا + لا + ب + لا + ج$$

$$۳ - (ا) لا = ۳ لا + ۲ لا + ۱ لا + (لا - ۶) = ما = ۱ + ۱$$

$$(ب) لا = ما - ۱ + \frac{ما}{لا} = ۱ + ۱$$

$$(ج) لا = ۴ لا + ۱ لا + ۱ لا - ۴ لا + ۱ لا + ۱ لا - ۶ لا$$

$$+ \frac{۱}{۲} (لا + ما) = لا (لوک لا - ۱) + ۱$$

۱۲- م = (ا + ب + لا) جب لا + (ج + د + لا) جم لا + ع جب ب لا
 + ف جم ب لا + گ و $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ جب ج لا + $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ جم و $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ جم ج لا +
 + $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ و $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ جب ج لا + $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ و $\frac{\text{ج لا}}{۲}$ جم ج لا +

صفحہ (۵۹)

$$\frac{x}{120} + \frac{x}{120} \quad (3) \quad \frac{x}{(2+1)(1+1)} \quad (2) \quad \frac{x}{4} \quad (1) = 1$$

صفحه (۶۲)

۶۰۔ واجب لا، لا مؤ لوک (۱۰)

صفحہ (۶۳)

۱۔ $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{4}c$ (ب لـ س ا ب)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ حجم (۲ لا-مس ۲)}$$

$$\frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \text{جیب} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \frac{1}{\sqrt{a}} \text{جیب} \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \right\}$$

¼ (جب لا جنزلا - جم لا جنزلا)

$$۲ - \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ لا } \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{3}{4} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

صفحہ (۶۵)

$$\frac{\text{قو (جب لا جم لا) قو لا } ۴ \text{ و (و-۱) جب لا } + (۱-۲+۱) \text{ جم لا}}{\text{و (و+۱)}}$$

۲- جم لا جز لا

صفحہ (۶۶)

$$۱ - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{ لا } + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \text{ لا } + \frac{1}{4} \text{ لا}$$

$$۲ - \text{قو } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \text{ لا } + \frac{1}{8} \right) \text{ قو } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{ لا } \right) + \text{قو } \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right)$$

$$۳ - \frac{1}{4} \text{ قو (لا جب لا جم لا) - قو } \left(\frac{3}{4} + \text{لا} \right) \text{ جم لا - (لا + } \frac{1}{5} \text{) جب لا}$$

صفحہ (۷۲)

$$۱ - (۱) - \frac{1}{2} \text{ لا جم لا } (۲) \frac{1}{2} \text{ لا جب لا } (۳) \frac{1}{2} \text{ لا جز لا}$$

$$(۴) \text{ قو } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \text{ لا } \right) (۵) \frac{1}{2} \text{ لا قو } (۶) \frac{1}{2} \text{ لا (جز لا جم لا)}$$

$$(۷) \frac{1}{2} \text{ لا (و-و-ب) } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ و ب } + \frac{1}{2} \text{ و ب } \right) (۸) \frac{1}{4} \text{ لا جب لا جب لا}$$

$$۲ - (۱) = ۶ = ۱ \text{ قو } + ۱ \text{ قو } + ۱ \text{ قو } + \frac{1}{2} \text{ قو لا}$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \text{ لاجب لـ} + \frac{\text{لا}^2 \text{و}^2}{8} + \text{لا} + 2$$

صفحہ (۷۵)

$$\begin{aligned} 1 - & \text{ا} = \text{ا} = \text{ا} \text{جب (ق لوک لا)} + \text{ا} \text{جم (ق لوک لا)} \\ 2 - & \text{ا} = \text{ا} = \text{ا} \text{جب (ق لوک لا)} + \text{ا} \text{جم (ق لوک لا)} + \frac{\text{ا}}{\text{ق}^2} - \frac{\text{ا}}{\text{ق}^2} \\ & \text{ا} = \frac{\text{ق} \text{ا} \text{جب (لوک لا)} - \text{ا} \text{جم (لوک لا)}}{\text{ق}^2 + \text{ق}} - \frac{\text{لوک لا} \text{جم (ق لوک لا)}}{\text{ق}^2} \end{aligned}$$

$$3-6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ آداب جب } (\frac{1}{2} \text{ لوک لا}) + \frac{1}{2} \text{ آلا جم } (\frac{1}{2} \text{ لوک لا})$$

$$m - 6 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

۵۔ ۶ = اِجِب {ق پ} لوک (ا + ب لا) + {ق پ} لوک (ا + ب لا) =

صفحہ (۸۲)

۱- $۲ لا + ۲ ما = ب$ ۳- $ر = ب$ و $طه$ مس $ع = م$ $\frac{ب}{ر} = ۱ - ج$ جم طه

صفحہ (۸۹)

۱۔ رکھو ما = لا سی، ما^۱ = لا^۳ - م^۲ لا^۲ + م^۲ لا + ج لا قو^۱

۲۔ رکھو مس ما = می، مس ما = رجم لا + پ جب لا + لا

۳۔ رکھو $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ج $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{6} = 1$ د $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}$

$$\frac{1 + \frac{1}{b}}{b(b+1)} + \frac{1}{b(b+1)} =$$

جہاں م، م، مساوات ب^۱ م + (و ب - ب^۱) م + ب =
کی اصلیں ہیں -

۴۔ رکھوی = سن' لا' ما = (لا + ب) / لا + لا

۵۔ رکھوی = جبت 'لا' ما = وجب (ن جبت 'لا')

+ بجم (ن جب-ال)

۶۔ رکھو $\dot{u} = \text{ض}$ ، $\dot{u} = \text{ع}$ ، $(\dot{u} - \dot{u} + 1) \dot{u} = 1$

۷۔ رکھو جب لا = ضا، جب ما = عا، (جب ما-جب لا+ا) تو = لا

۸- (د) $a = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ و $b = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ و $c = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$(ب) = ۱ = (۱ + ب لا) قو۳ + ۲ جم لا + \frac{۳}{۲} جب لا$$

(ج) ماہ و لا تَجِب (لوک لا) + پ لا تَجْم (لوک لا)

9-6+1=1 جب 2 لا + ب جم 2 لا + ج جب 2 لا + د جم 2 لا

۳ ی = ۶ - (اجیب ۲ لا + بجم ۳ لا) + (اجیب ۴ لا + ججم ۴ لا)

۱۰۔ م = لا جو ک لا

۱۱۔ ایک لاء + اولاء + ب

فہرست اصطلاحات

Canonical form	صورت آئینی
Clairaut's form	کلیروی صورت
Commutative law	قانون مبادلہ
Complementary Function	متمم تفاعل
Complete primitive	کامل ابتدائی
Distributive law	قانون تقسیمی
Elimination	استقاط
"Exact" Differential Equations	"بھیک" یا حاضر مساواتیں
Homogeneous Equations	متجانس مساواتیں
Index law	قانون قوت نما
Irreversible process	غیر انقلاب پذیر عمل
Linear Equations	خطی مساواتیں
Operator	عامل
Order	رتبہ
Orthogonal trajectory	قائم مرقی
Particular integral	خاص تکمیلی
Rigid Dynamics	استوار اجسام کا علم حرکت
Singular Solution	تناور حل

ترقیہ

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ect}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \text{ وغیرہ}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

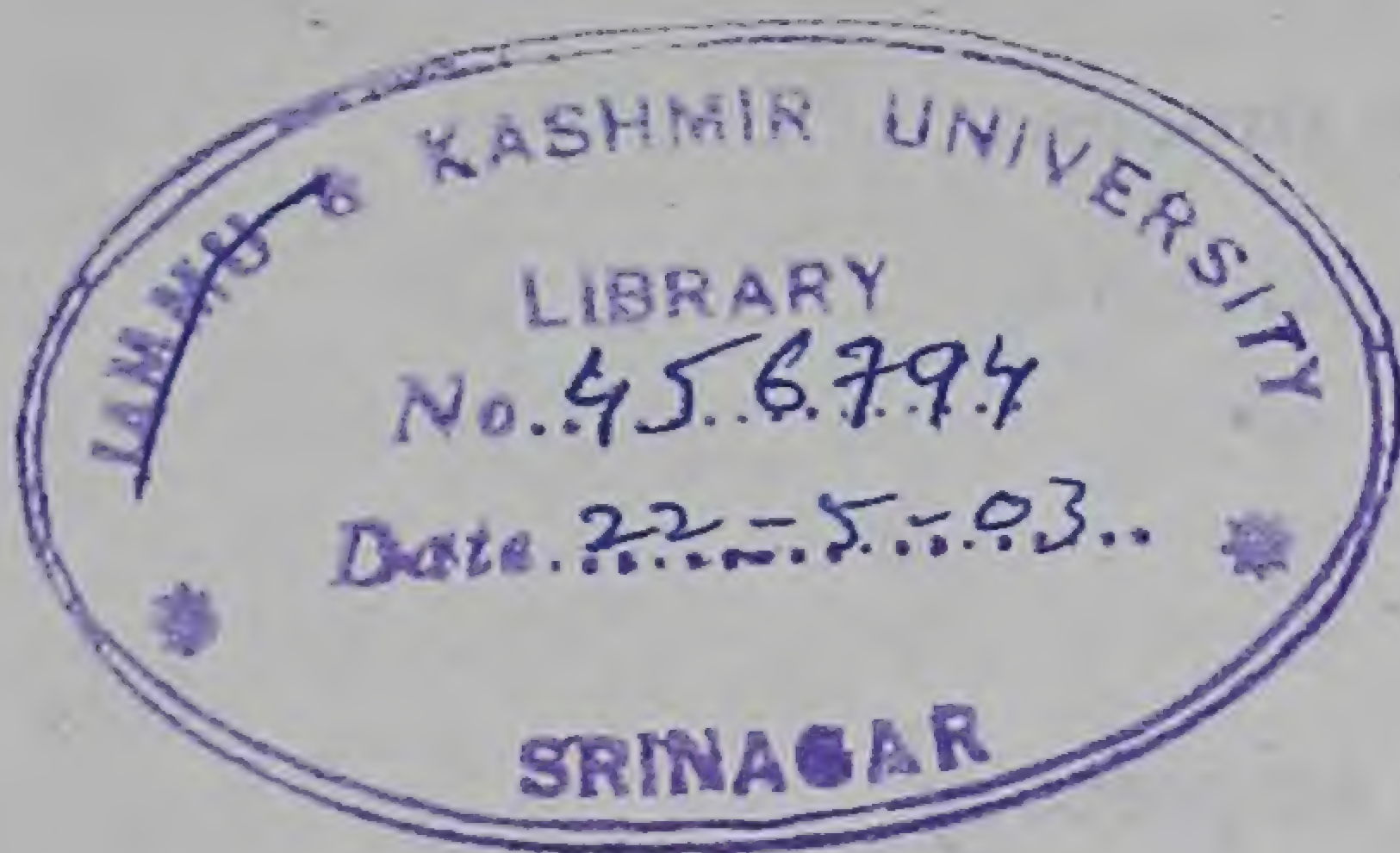
$$\frac{dy}{dx}$$

$$\int f(x) dx$$

$$\int f(x) dx$$

$$D \left(\frac{d}{dx} \right)$$

$$D \left(\frac{d}{dx} \right)$$





**ALLAMA
IQBAL LIBRARY**

**UNIVERSITY OF KASHMIR
HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN**